

**Stochastik und Nichtlinearität in der
Modellökonomie — demonstriert am
Kaldor'schen Konjunkturmodell**

Franz Hahn

April 1985

11

**Stochastik und Nichtlinearität in der
Modellökonomie — demonstriert am
Kaldor'schen Konjunkturmodell**

Franz Hahn

WIFO Working Paper 11, April 1985

Österreichisches Institut für Wirtschaftsforschung
Austrian Institute of Economic Research

**Stochastik und Nichtlinearität in der
Modellökonomie — demonstriert am
Kaldor'schen Konjunkturmodell**

Franz Hahn

WIFO Working Paper 11, April 1985

Österreichisches Institut für Wirtschaftsforschung
Austrian Institute of Economic Research

ZUR STOCHASTIK UND NICHTLINEARITÄT IN DER MAKROÖKONOMIE -
DEMONSTRIERT AM KALDOR-VARIAN-KONJUNKTURMODELL

Franz Hahn

1. Einleitung

Nichtlineare Modelle spielen bekanntlich innerhalb der Makro-
ökonomie bzw. der Makro-Modellökonomie eine eher unbedeutende
Rolle. Nach einer kurzen "Hausse" in den 40er und 50er Jahren,
die aufs Engste mit so namhaften Ökonomen wie R.M. Goodwin,
J.R. Hicks, A.W. Phillips und nicht zu letzt mit N. Kaldor verbun-
den ist, verebbte das Interesse an der nichtlinearen Modellierung
im Rahmen der Makroökonomie zusehens.

Neben einer Reihe von theoretisch wie auch empirisch fundierten
Erklärungs- und Rechtfertigungsversuchen für dieses "Desinteresse"
(vergleiche dazu vor allem Rose (20), S. 153) dürfte der wahre
Grund dafür jedoch der sein, daß nichtlineare Modelle alles andere
als leicht zu formulieren sind, nicht zuletzt deshalb, weil seitens
der makroökonomischen Theorie kaum entsprechende Hilfestellungen
etwa im Zusammenhang mit Spezifikationen von nichtlinearen ökonomischen
Beziehungen angeboten werden. Darüber hinaus sind nichtlineare
Modelle auch mathematisch wesentlich schwerer zu behandeln als
lineare - ein Grund, der vielleicht noch mehr ins Gewicht fällt
als der eben genannte.

Trotz oder gerade wegen des Siegeszuges des linearen Modells in der
theoretischen wie angewandten Makroökonomie hat sich die Notwendig-
keit der Berücksichtigung des "nichtlinearen Elements" in der Modell-
ökonomie nie ganz verdrängen lassen. Die Gewißheit, daß bestimmte
makroökonomische Zusammenhänge und Zustände im Prinzip nichtlinearer
Natur sind und durch Linearisierung nur äußerst unvollkommen - wenn
überhaupt - angenähert werden können, hat sich in den letzten Jahren
nicht zuletzt wegen des engen und begrenzten Erklärungspotentials
linearisierter ökonometrischer Makromodelle eher noch verstärkt.

Dies und die jüngsten Entwicklungen im Bereich der angewandten Mathematik (z.B. Katastrophentheorie, Synergetics), die eine einigermaßen hinreichende formale Analyse von bestimmten Klassen nichtlinearer, dynamischer Modelle ermöglichen, haben insbesondere in den letzten Jahren wiederum zu einer gewissen Renaissance des Interesses an diesem Bereich der Modellökonomie geführt.¹⁾

Der unmittelbar theoretisch-analytische Nutzen dieses non-linear-approach in der Makroökonomie liegt bekanntlich in erster Linie im heuristischen bzw. propädeutischen Wert dieser Modelle.

Gerade mit Hilfe einfacher nichtlinearer Modelle konnten oftmals bestimmte relevante ökonomische Zusammenhänge und Phänomene, die im Rahmen linearer Modelle nicht erklärbar bzw. analysierbar sind, in ihren wesentlichen Strukturen auf (noch) relativ einfache und überschaubare Weise beschrieben und analysiert werden (man denke in diesem Zusammenhang vor allem an die nichtlinearen Konjunkturmodelle von R.M. Goodwin (11) bzw. N. Kaldor (16)).

In der vorliegenden Notiz soll nun in dem eben angedeuteten Sinne anhand eines einfachen Konjunkturmodells von primär heuristischem Wert ein bisher theoretisch und analytisch wenig beachtetes Problem, nämlich das, sich von linearen, stochastischen Modellen grundsätzlich unterscheidende "Wechselspiel" von Zufall und Notwendigkeit in einem nichtlinearen, stochastischen Makromodell auf (noch) relativ einfache und überschaubare Weise beschrieben und analysiert werden. Als Referenzmodell für dieses "Demonstrationsexperiment" wählen wir das berühmte, nichtlineare Konjunkturmodell von N. Kaldor (16), allerdings in der Version von H. Varian (23) als elementares Katastrophenmodell (im folgenden kurz: K-V-Modell genannt).

1) Siehe dazu Boldrin (1), Gandolfo (8), Medio (18), Varian (23)

Die Notiz ist im einzelnen wie folgt strukturiert: Im 2. Abschnitt wird eine kurze, kursorische Darstellung des ursprünglichen Kaldor-Modells und der, die Intension des Kaldor-Modells erweiternden Modell-Version von H. Varian (23) gegeben. Das 3. Kapitel ist zur Gänze der einfachen, stochastischen Erweiterung des K-V-Modells gewidmet. Im letzten Abschnitt werden einige Implikationen des Zusammenwirkens von "Zufall" und "Nichtlinearität" im Rahmen dieses Modells diskutiert, insbesondere, daß Zufallschwankungen zu qualitativen Systemänderungen führen bzw. sogenannte Verzweigungen beeinflussen können.

2. Das K-V-Modell

Das ursprüngliche Kaldor'sche Konjunkturmodell wurde von H. Varian (23) in Anlehnung an Chang/Smyth (2) durch die folgenden zwei nicht-linearen Differentialgleichungen dargestellt:

$$(1) \quad \dot{y} = \alpha [c(y) + i(y, k) - y] \quad , \alpha > 0$$

$$(2) \quad \dot{k} = i(y, k) - k_0$$

$$(3) \quad \dot{y} := \frac{dy}{dt} \quad , \quad \dot{k} := \frac{dk}{dt}$$

wobei y für das gesamtwirtschaftliche Volkseinkommen, k für den gesamtwirtschaftlichen Kapitalstock, k_0 für die autonomen, effektiven Abschreibungen und t für den Zeitparameter steht.²⁾

2) Die Annahme autonomer Abschreibungen bzw. vom Kapitalbestand unabhängiger Ersatzinvestitionen ist eine ausschließlich technische, um die Existenz genau eines Gleichgewichtszustandes zu garantieren (siehe dazu Chang/Smyth (2) S. 39 ff bzw. Varian (23) S. 25 ff bzw. Fußnote 3)

Der Parameter $\lambda > 0$ repräsentiert den Anpassungsgeschwindigkeitskoeffizienten.

Die Konsumfunktion, repräsentiert durch $c(y)$, erfüllt die Standardbedingung, die üblicherweise an Konsumfunktionen gestellt wird: $0 < c_y < 1$.

Das Besondere an diesem Modell ist jedoch die Investitionsfunktion $i(y,k)$. Kaldor unterstellte eine nichtlineare Beziehung zwischen den Brutto-Anlageinvestitionen i und dem Einkommensniveau y , als Maß für das ökonomische Aktivitätsniveau einer Volkswirtschaft. In concreto unterstellte er einen logistischen Kurvenverlauf der Investitionsfunktion in y .

Im Detail sehen die Spezifikationen bezüglich $i(y,k)$ folgendermaßen aus:³⁾

$$(4) \quad i_y > 0, \quad i_{yy} > 0 \text{ für } y < \bar{y}, \quad i_{yy} < 0 \text{ für } y > \bar{y}$$

$$(5) \quad i_k < 0$$

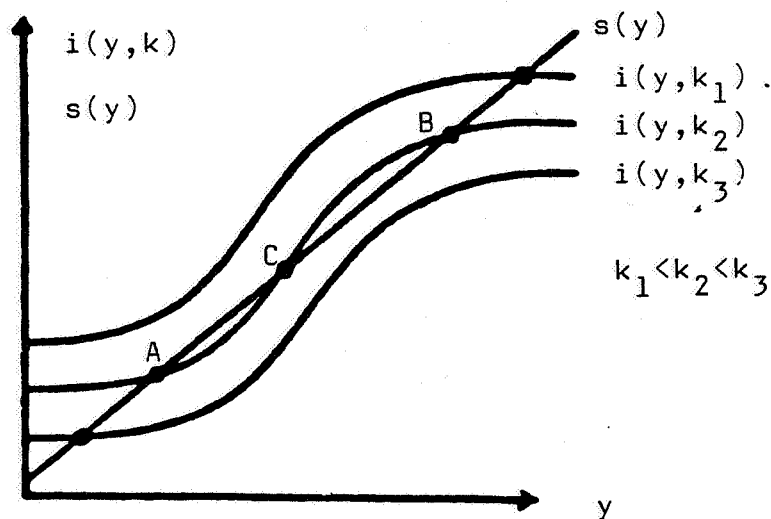
$$(6) \quad i_{yk} = i_{ky} = 0$$

3) Hinsichtlich der Spezifikationen (4) der Investitionsfunktion von Kaldor gilt im besonderen, was H. Varian (23) für das gesamte Modell vermerkt: "However, the hypothesis of the model are neither derived from microeconomic models of maximizing behaviour, nor are they subjected to serious empirical testing. The hypothesis are not without economic plausibility, but they are far from being established truths." (Varian (23), S. 14). Dieses Zitat von H. Varian verdeutlicht darüber hinaus exakt das, was wir im vorliegenden Zusammenhang unter einem Modell von vorwiegend heuristischem Wert verstehen. Bezüglich einiger weiterer theoretischer Probleme im Zusammenhang mit der Struktur und den Grundannahmen des K-V-Modells sei ebenfalls auf die entsprechenden Passagen in Varian (23) verwiesen.

Die ungewöhnliche Spezifikation der Investitionsfunktion begründete N. Kaldor im wesentlichen mit dem "Plausibilitätsargument", daß bei einem geringen gesamtwirtschaftlichen Aktivitätsniveau die marginale Investitionsneigung gering ist auf Grund der vorhandenen Überschußkapazitäten. Bei einem hohen Aktivitätsniveau, also in der Boomphase beeinträchtigen die hohen Reallöhne und Zinssätze die Investitionsneigung.⁴⁾

Unterstellt man nun mit H. Varian (23) der Einfachheit halber eine in y lineare (ex-ante-) Sparfunktion $s(y)$, so läßt sich unter Berücksichtigung der Spezifikation (4) und (5) die Menge all jener (y,k) -tupel in der (y,k) -Ebene unmittelbar geometrisch ableiten, die die Gleichgewichtsbedingungen $i = s$ erfüllen (dies ist durch die Annahme eines sehr großen Adjustment-Koeffizienten $\alpha \gg 0$ in (1) "quasi" ständig gegeben).

Abbildung 1



4) Vgl. dazu Kaldor (16), S. 81

Wie aus Abbildung 1 ersichtlich ist, existieren für ein bestimmtes Intervall, nennen wir es (k_a, k_b) , drei unterschiedliche Gleichgewichtszustände. Jeweils zwei Fixpunkte bzw. auf niedrigem bzw. hohem Aktivitätsniveau (A, B in Abbildung 1) sind lokal dynamisch stabil, der Gleichgewichtszustand auf mittlerem Aktivitätsniveau (C in Abbildung 1) ist lokal dynamisch instabil, wie sich leicht mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse zeigen läßt. Dahinter steht bzw. verbirgt sich die Annahme, daß die marginale Sparneigung nur in einem bestimmten Intervall kleiner ist als die marginale Investitionsneigung. Dies bedeutet für die $\dot{y}=0$ -Kurve in der (y, k) -Ebene, daß sie für $y \in (y_a, y_b)$, dem zu (k_a, k_b) korrespondierenden Intervall auf der y -Achse, streng monoton steigt, für $y \notin (y_a, y_b)$ hingegen streng monoton fällt.⁵⁾

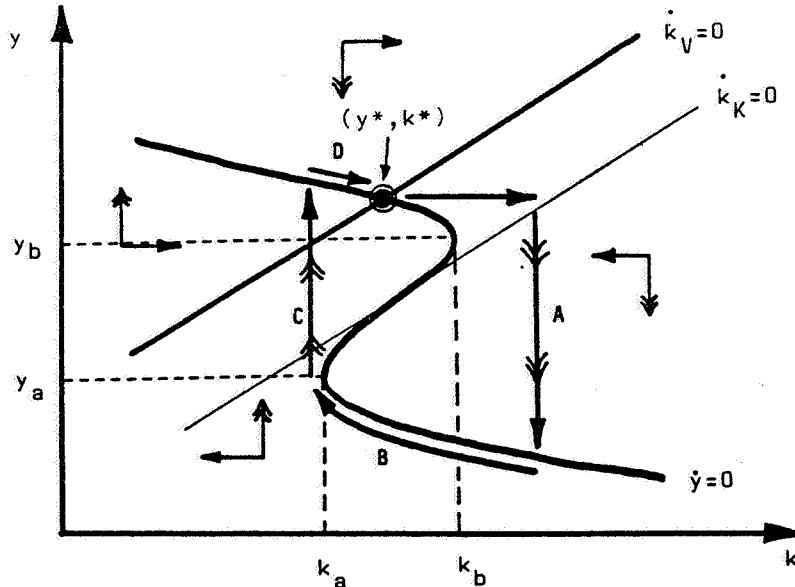
Die $\dot{k}=0$ -Kurve ist hingegen, wie unter den gegebenen Annahmen un schwer zu sehen ist, in der (y, k) -Ebene streng monoton steigend. Ein wichtiges Ergebnis in diesem Zusammenhang ist nun, daß unter den vorliegenden Annahmen, insbesondere hinsichtlich der Konsumneigung (d.h. $0 < c_y < 1$ bzw. $s_y > 0$), für das dynamische System (1) und (2) genau ein Fixpunkt existiert.⁶⁾

Das heißt, die beiden Gleichgewichtskurven $\dot{y}=0$ bzw. $\dot{k}=0$ kreuzen sich genau einmal (siehe Abbildung 2)

5) Siehe dazu Chang/Smyth (2) bzw. Ursprung (22), S. 284 ff

6) Den genauen mathematischen Beweis hierfür entnehme man Varian (23), bzw. Chang/Smyth (2).

Abbildung 2



Kaldor untersuchte nun in seinem berühmten Artikel nur das qualitative Verhalten des dynamischen Systems bei Vorliegen eines dynamisch instabilen Gleichgewichts, d.h. den Spezialfall, daß die $\dot{k}=0$ - Kurve die $y=0$ -Kurve im monoton steigenden Bereich kreuzt (siehe in Abbildung 2 $\dot{k}_K=0$). Kaldor vermutete unter geringfügig unterschiedlichen Modellbedingungen als den hier vorliegenden, jedoch unter den gleichen dynamischen Standardbedingungen wie sie im Phasendiagramm der Abbildung 2 bzw. in den Gleichungen (1) und (2) dargestellt sind, ein permanentes Oszillieren des Systems um diesen Fixpunkt. Den rigorosen Beweis für die Existenz eines Grenzyklus und dessen Persistenz mit Hilfe des Poincare-Bendixson-Theorems haben jedoch erst Chang/Smyth (2) geführt.

H.Varian ging nun im Gegensatz zu N.Kaldor bzw. Chang/Smyth von einem dynamisch stabilen Gleichgewicht aus bzw. von einem Gleichgewichtszustand, der auf dem "oberen" Ast der $y=0$ -Kurve lokalisiert. Dies bedeutet geometrisch, wie in Abbildung 2 durch $\dot{k}_V=0$ -Kurve dargestellt, daß sich die $\dot{k}=0$ -Kurve und die $y=0$ -Kurve im Gleichgewichtsbereich für $y > y_b$ kreuzen, also im Bereich der "höheren" Aktivitätsniveaus.⁷⁾

7) H.Varian (23) begründet diese "Ausgangssituation"-etwas sophisticated- damit, daß "(1) regular cycles seem to be incompatible with rational economic behaviour, and (2) there is little statistically significant evidence for a business cycle anyway. However, there does seem to be some evidence for a kind of 'cyclic behaviour' in the economy".
Varian (23), S. 20

H. Varian geht weiters davon aus, daß dieser Gleichgewichtszustand $((y^*, k^*))$ in Abbildung 2) ein "long run equilibrium" (oder ein "long run equilibrium growth path") ist, das lokal stabil, jedoch global instabil ist. Sinnvollerweise wird daher angenommen, daß (y^*, k^*) im bimodalen Bereich liegt, d.h. $k^* \in (k_a, k_b)$.

Durch die Interpretation der Variablen y als sogenannte schnelle Variable, gewährleistet durch einen sehr großen Adjustment - koeffizienten $\lambda \gg 0$, und des Kapitalstocks k als sogenannte langsame Variable bzw. als "Parameter" läßt sich nun die kurzfristige Gleichgewichtskonfiguration des derart reduzierten dynamischen Systems als sogenannte Doppelfaltenkatastrophe deuten. Oder anders formuliert: Die kurzfristige Gleichgewichtskonfiguration des derart reduzierten dynamischen Systems (gemeint ist die $y=0$ -Kurve in Abbildung 2) ist topologisch äquivalent der Gleichgewichtskonfiguration einer Doppelfaltenkatastrophe in kanonischer Form im Sinne der elementaren Katastrophentheorie.⁸⁾

Die unterschiedliche Dynamik des Systems (1) und (2) kann nun vor dem Hintergrund dieser zusätzlichen Modellannahmen wie folgt interpretiert werden: Die "schnelle Dynamik" der Gleichung (1) bestimmt die "kurzfristige" Gleichgewichtskonfiguration $y=0$ des Modells, während die "langsame Dynamik" der Gleichung (2) den Fluß auf der Gleichgewichtskurve $y=0$ steuert.⁹⁾

Das K-V-Modell stellt damit im wesentlichen eine einfache formale Beschreibung sowohl der plausiblen, von A. Leijonhufvud (17) stammenden Hypothese der sogenannten Korridorstabilität (Varian (23), S. 21 "small shocks are dampened out, but large shocks may be amplified"), als auch der sogenannten Überinvestitionshypothese der Konjunkturtheorie dar.¹⁰⁾

8) Vgl. dazu vor allem Ursprung (22), S. 283 ff bzw. Zeeman (25), S. 66

9) Vgl. dazu Ursprung (22), S. 292

10) Varian (23), S. 21 : "Suppose for some reason firms acquire too much capital, perhaps by overinvesting in inventories. Then the investment function might shift down so far that the only short run equilibrium level of income would be very low. As inventories are gradually decumulated, k falls and investment begins to recover. At a critical value of k , income jumps rapidly back to the upper leaf and k eventually returns to its long run equilibrium level."

Das hier kursorisch dargestellte Modell hat H. Varian (23) durch die Berücksichtigung einer Vermögensanpassungsfunktion bzw. einer Vermögensvariable, die er im Sinne der elementaren Katastrophentheorie als Spaltfaktor bzw.-variable interpretiert, erweitert.¹¹⁾ Das derart erweiterte Modell läßt sich als sogenannte Spitzenkatastrophe im Sinne der elementaren Katastrophentheorie interpretieren, an dem H. Varian die unterschiedlichen Bedingungen von Rezession und Depression im Rahmen dieses Modells sehr elegant beschreibt.

Für die stochastische Erweiterung des K-V-Modells im nächsten Abschnitt wollen wir uns jedoch aus Gründen der einfacheren, geometrischen Darstellung nur auf das "Rezessions-bzw. Faltenmodell" beschränken, nicht zuletzt auch deshalb, weil sämtliche Schlußfolgerungen im wesentlichen auch für das "Depressions-bzw. Spitzenmodell" gelten.

3. Eine einfache stochastische Variante des K-V-Modells

Die Interpretation des Kaldor-Modells als Faltenkatastrophe im Sinne der elementaren Katastrophentheorie ermöglicht nun zwei Vereinfachungen gegenüber der ursprünglichen Formulierung des K-V-Modells, die die weitere formale Behandlung und Vorgangsweise nicht unwesentlich erleichtern.

Zum einen läßt sich das dynamische System (1) und (2) durch die "Katastrophenmodellierung" von Varian formal wie ein Gradientensystem behandeln.¹²⁾ Diese speziellen dynamischen Systeme zeichnen sich bekanntlich durch ihre besonders einfache mathematische Struktur aus, die sich unter anderen darin ausdrückt, daß die qualitative Analyse von Gradientensystemen sich auf die Untersuchung der jeweiligen Potentialfunktion reduziert, die den Fluß dieses Systems

11) Siehe Varian (23), S. 22 ff.

12) Die elementare Katastrophentheorie beschränkt sich ausschließlich auf die Analyse dynamischer Systeme, deren Fluß von einer Potentialfunktion geleitet wird. Das Standardbeispiel für ein derartiges System ist bekanntlich das Gradientensystem. Vgl. dazu Ursprung (22), S. 19 bzw. 110 ff.

steuert.¹³⁾ Modellökonomisch möge man sich im vorliegenden Zusammenhang diese, den Fluß bzw. die Dynamik des K-V-Modells hin zu den lokal stabilen, kurzfristigen Gleichgewichtszuständen steuernde Potentialfunktion, als eine Art gesamtwirtschaftliche Kostenfunktion vorstellen.

Die zweite "Vereinfachung", die wir vornehmen, bedeutet ebenfalls gegenüber dem ursprünglichen K-V-Modell hinsichtlich seines qualitativen Verhaltens keine Modifikation bzw. Einschränkung. Wir machen im folgenden nur explizit von der Möglichkeit im Rahmen der elementaren Katastrophentheorie Gebrauch, anstelle des ursprünglichen Katastrophenmodells eine, der dazu topologisch äquivalenten sogenannten typischen Grundformen der Doppelfaltenkatastrophe zu betrachten. Dies hat den ungeheuren analytischen wie didaktischen Vorteil, daß sich die Analyse des K-V-Modells bzw. des qualitativen Verhaltens seiner kurzfristigen Gleichgewichtszustände (d.h. $y=0$ -Kurve) in Abhängigkeit von der langsamen Variablen k auf die Analyse etwa der (parameterabhängigen) Singularitätsstruktur eines Polynoms 4. Grades oder der parameterabhängigen, stationären Lösungen eines, im Sinne der elementaren Katastrophentheorie typischen Gradientensystems reduziert.¹⁴⁾

13) Ein dynamisches System (in Vektornotation) $\dot{x}=f(x,a)$ auf $X:\mathbb{R}^n$, $f:X \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x=f(x,a)$, $A:\mathbb{R}^m$ sei der Parameterraum, wird Gradientensystem genannt, wenn eine C^1 -Funktion $V:X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, die folgende Bedingung erfüllt: $x = -DV(x,a)$, D repräsentiert den Differentialoperator. Die Funktion V heißt Potentialfunktion. Hinsichtlich einiger weiterer, formal sehr angenehmer Eigenschaften dieser speziellen dynamischen Systeme sei auf das entsprechende Kapitel von Hirsch/Smale (14) bzw. auf den Übersichtsartikel von H. Varian (24) verwiesen.

14) Im Rahmen des zentralen Theorems der elementaren Katastrophentheorie, dem Klassifikationstheorem, wird gezeigt, daß für Gradientensysteme mit einer unbeschränkten Anzahl von Zustandsvariablen, jedoch höchstens 5 Parametern lokal, d.h. in der Umgebung von Katastrophenpunkten, im Zusammenhang mit den Gleichgewichtsflächen sieben sogenannte Elementarkatastrophen existieren, die sich durch einfache mathematische Konstrukte, den sogenannten typischen Grundformen oder den kanonischen Formen, beschreiben lassen. Vgl. dazu z.B. Fischer (5), S. 8; Ursprung (22) S. 110; Zeeman (25), S. 90.

Das bedeutet im vorliegenden Zusammenhang, daß wir die wichtigen qualitativen Aspekte des K-V-Modells anhand der folgenden nicht-linearen, "konkreten" Differentialgleichung, die, wie sich leicht zeigen läßt, sämtliche Eigenschaften eines Gradientensystems aufweist, analysieren können

$$(1') \quad \dot{y} = -ky - ay^2 - by^3$$

$k, a, b > 0$, Parameter

$y(0) = y_0$ - Anfangsbedingung

Die Menge der stationären Lösungen dieser nichtlinearen Differentialgleichung bzw. in Abhängigkeit des Parameters $k \in (-\infty, +\infty)$, der auch im vorliegenden Zusammenhang den realen Kapitalstock symbolisiert, ist bei Konstanz der beiden anderen Parameter $a, b > 0$ topologisch äquivalent bzw. qualitativ gleich der $\dot{y}=0$ -Kurve des Referenzmodells in der (y, k) -Ebene.¹⁵⁾

Die Gleichung (1') kann somit im vorliegenden Zusammenhang als eine Art "phänomenologischer Gleichung" betrachtet werden.

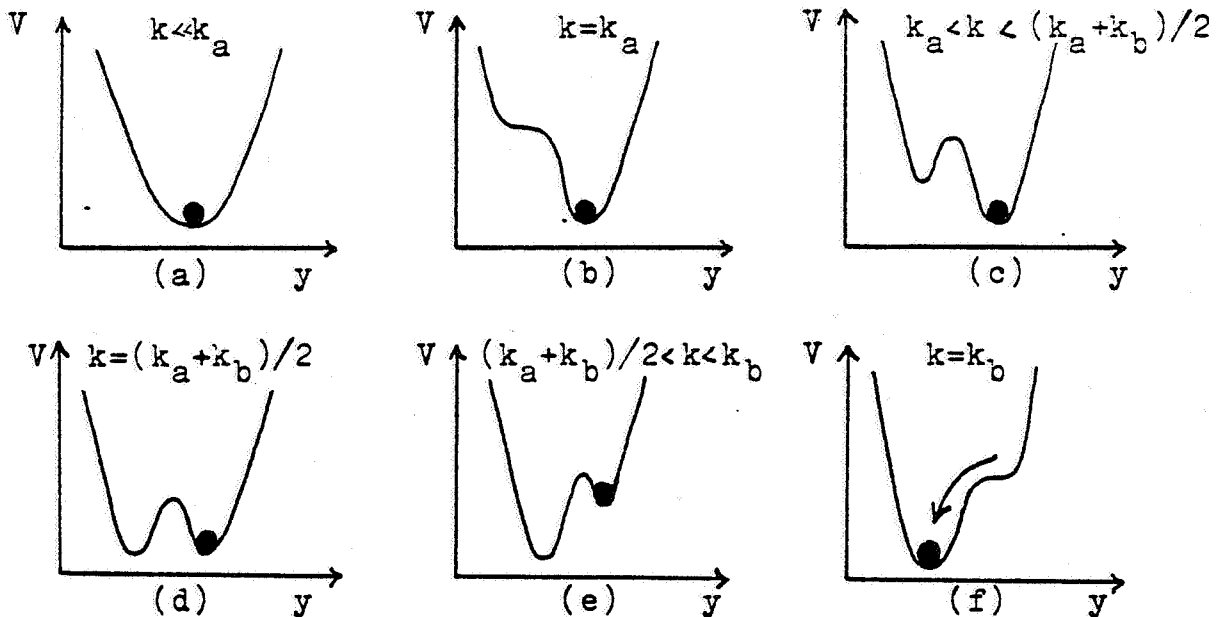
Die mit dem einfachen Gradientensystem (1') korrespondierende, "phänomenologische" Potentialfunktion läßt sich nun folgendermaßen anschreiben

$$(2') \quad V(y, k) = \frac{k}{2}y^2 + \frac{a}{3}y^3 + \frac{b}{4}y^4$$

In Abbildung 3 sind einige der für das K-V-Modell typischen Graphen der Potentialfunktion, allerdings koordinatentransformiert, in Abhängigkeit der langsamen Variablen k dargestellt.

15) Dies ist mit Hilfe des Konzeptes der topologischen Rechts-Links-Äquivalenz sehr leicht nachzuprüfen. Zum Konzept der Rechts-Links-Äquivalenz siehe z.B. Ursprung (22), S. 42

Abbildung 3



Wie aus dieser Darstellung zu sehen ist, korrespondiert die Singularitätsstruktur der Potentialfunktion mit der Gleichgewichtskurve $\dot{y}=0$ der Abbildung 2. Das schwarze "Kügelchen" in Abbildung 3 symbolisiert die jeweilige Gleichgewichtslage der schnellen Variablen y , die - und dies ist typisch für Gradientensysteme - jeweils einem lokalen Minimum der Potential-bzw. Kostenfunktion entspricht.

Die Zustandsvariable y verharret so lange an diesen, allerdings in Abhängigkeit vom Parameter k sich kontinuierlich verändernden Gleichgewichtszustand bis dieses lokale Minimum verschwindet (siehe Abbildung 3 (f)).

Diese Eigenschaft eines Gradientensystems wird im Rahmen der elementaren Katastrophentheorie als sogenannte Delay-Convention oder -Rule bezeichnet.

Das Verschwinden bzw. Verschmelzen eines lokalen Minimums und lokalen Maximums einer Potentialfunktion zu einem kritischen Wendepunkt verursacht nun jenen diskontinuierlichen Wechsel der Gleichgewichtslage, der als Elementarkatastrophe bezeichnet wird (siehe Abbildung 3 (f)).¹³⁾

13) Das Auftreten von Elementarkatastrophen ist formal gleichbedeutend mit folgender Bedingung: $V_y = V_{yy} = 0$

Modellökonomisch haben diese Elementarkatastrophen bzw Katastrophenpunkte im vorliegenden Zusammenhang die Bedeutung eines oberen bzw. unteren Wendepunktes, wie bereits im Abschnitt 2 betont wurde. Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun die stochastische Erweiterung des K-V-Modells in Angriff nehmen.

Die Annahme über die unterschiedliche Reaktionsgeschwindigkeit hinsichtlich der Variablen y , dem Volkseinkommen und der langsamen Variablen k , dem Kapitalstock, legen nun nahe, davon auszugehen, daß die zufälligen Störungen bzw. Zufallsschocks lediglich die schnelle Variable y bzw. die schnelle Dynamik, repräsentiert durch die Gleichung (1) des K-V-Modells, beeinträchtigen, jedoch einen vernachlässigbaren Einfluß auf die langsame Variable k des Modells haben.

Diese zusätzliche Vereinfachung erlaubt es nun, die Stochastisierung des K-V-Modells, stellvertretend für das (ursprüngliche) K-V-Modell an dem "reduzierten", dynamischen System (1') vorzunehmen.

Die Stochastisierung soll nun auf die denkbar einfachste Art und Weise erfolgen, nämlich durch einen additiven stochastischen Term, der den klassischen Bedingungen des Gauß'schen white-noise-Prozess gehorcht.

Formal bedeutet dies, daß wir es mit einer nichtlinearen Differentialgleichung mit einem stochastischen, inhomogenen Teil zu tun haben, wobei letzterer folgenden klassischen Bedingungen genügt

$$(3') \quad dy = (-by^3 - ay^2 - ky)dt + dB(t)$$

$$(4') \quad E [dB(t)] = 0$$

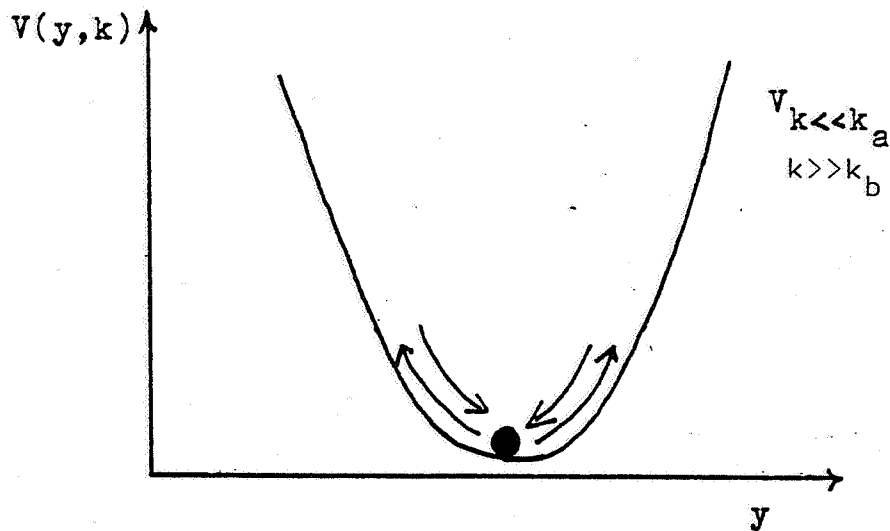
$$(5') \quad E [dB(t)^2] = Q \cdot dt, \quad Q \in R \text{ und fest}$$

Die Gleichung (3') ist formal ein (einfacher) Repräsentant einer speziellen Klasse von stochastischen Differentialgleichungen, die vor allem in der Kontrolltheorie, aber auch in der Kommunikationstheorie eine bedeutende Rolle spielt.¹⁷⁾ Diese Klasse von stochastischen Differentialgleichungen wird üblicherweise "vom Ito-Typ" genannt.

Die vorliegende "Ito-Gleichung" (3') beschreibt nun einen speziellen stochastischen Prozess bzw. einen Wiener - oder sogenannten Brown'schen Prozess.¹⁸⁾

Geometrisch bedeutet dies im Sinne der "Potentialfunktion-Darstellung" der Abbildung 3, daß das "scharze K ugelchen" durch Zufallsschocks aus der Gleichgewichtslage weg bewegt wird, jedoch gleichsam durch die deterministische Potential- bzw. Kostenfunktion immer wieder zur Gleichgewichtslage zurückgeführt wird (siehe Abbildung 4).

Abbildung 4



17) Vgl. dazu Soong (21), S. 119

18) Siehe Soong (21), S.183

Man kann sich diesen, in Abbildung 4 dargestellten Prozess als permanentes Zittern um einen lokal stabilen Fixpunkt vorstellen. Im Zusammenhang mit der stochastischen Erweiterung in Gestalt der Ito-Gleichung (3') ist nun im Gegensatz zum deterministischen Fall nicht mehr die einzelne Trajektorie respektive die Gleichgewichtstrajektorie von y von Interesse, sondern vielmehr die gesamte "Trajektorien- bzw. Lösungskurvendichte" und deren Veränderung in Abhängigkeit des Kontrollparameters k , dem Kapitalstock. Oder anders formuliert: Im Zusammenhang mit (3') ist nun vor allem die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen y und deren Veränderung in Abhängigkeit des Parameters k und hier insbesondere die "Gestalt" der Dichte in der Nähe der beiden konjunkturellen Wendepunkte von Interesse.

Zur formalen Behandlung dieser Problemstellung verwenden wir nun folgendes Theorem aus der Theorie der Ito-Gleichungen

Theorem: Es sei $f(y,t/y_0)$ die Dichte der Zufallsvariablen y zur Zeit $t > 0$, gegeben die Anfangsbedingung $y_0=0, t_0=0$.

Sei nun

$$(1*) \quad dy(t) = g(y(t),t)dt + dB(t)$$

eine Ito-Gleichung (d.h. $E[dB(t)] = 0, E[dB(t)^2] = Q \cdot dt$) mit der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$, dann existiert für die Übergangsdichte $\frac{\partial f}{\partial t}$ die folgende deterministische partielle Differentialgleichung

$$(2*) \quad \frac{\partial f(y,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} [g(y(t),t) f(y,t)] + \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y,t)$$

Die Gleichung (2*) heißt Fokker-Planck-Gleichung.

Ein Beweis dieses Theorems findet sich in Soong (21), 7. Kapitel

Die Fokker-Planck-Gleichung - formal eine spezielle Vorwärts-Kolmogoroff-Gleichung für den vorliegenden Markoff-Prozess - hat nun im Zusammenhang mit der stochastischen Differentialgleichung (3') folgende Gestalt

$$(6') \quad \frac{\partial f(y,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial y} [(-by^3 - ay^2 - ky)f(y,t)] + \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(y,t)$$

Aus (3') ist ersichtlich, daß der deterministische Teil der stochastischen Differentialgleichung keine Funktion der Zeit ist. Unter diesen Bedingungen ist es gerechtfertigt, davon auszugehen, daß der vorliegende, spezielle Markoff-Prozess $y(t)$ in ein "steady state" übergeht (auf alle Fälle jedoch dann, wenn $|t-t_0| \rightarrow \infty$). Dies bedeutet, daß wir vereinfachend die Dichte f als unabhängig von der Zeit und von der Anfangsbedingung annehmen können, woraus unmittelbar $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ folgt.

Wir sind somit im Zusammenhang mit der Fokker-Planck-Gleichung (6') nur an der stationären Lösung d.h. an der steady-state-Verteilung $f_s(y)$ interessiert.

Die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (6') - nunmehr degeneriert zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung - ist nun mit Hilfe gewöhnlicher Methoden erhältlich.¹⁸⁾

Die stationäre Lösung von (6') bzw. die steady-state-Verteilung $f_s(y,k)$ hat nun folgende Gestalt

$$(7') \quad f_s(y,k) = \frac{c}{Q} \cdot \exp \left\{ \frac{2}{Q} \cdot \int_0^y (-bs^3 - as^2 - ks) ds \right\}, \quad c\text{-konstant}$$

wobei $f_s(y,k)$ sinnvollerweise folgende Randbedingungen erfüllt

$$(8') \quad f_s(\underbrace{\pm \infty}_y) = 0$$

$$(9') \quad \frac{df_s(y,k)}{dy} \underbrace{(\pm \infty)}_y = 0$$

18) Siehe Soong (21), S. 197

Da wir von einem Gradientensystem ausgegangen sind, d.h. $\dot{y} = -DV(y,k)$, läßt sich die stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung (7') folgendermaßen formulieren

$$(10') \quad f_s(y,k) = N \exp \left\{ -\frac{2}{Q} V(y,k) \right\}$$

Der Term $N = \frac{C}{Q}$ repräsentiert den Normierungsfaktor, der die folgende wahrscheinlichkeitstheoretische Konvention garantieren soll

$$(11') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(y,k) dy = 1$$

Aus (10') ist nun unmittelbar ersichtlich und leicht nachvollziehbar, daß zwischen der deterministischen Potentialfunktion $V(y,k)$ und der steady-state-Verteilung $f_s(y,k)$ eine Beziehung besteht, die man sich anschaulich als eine, durch Q verzerrte Horizontalspiegelung vorstellen kann. Die steady-state-Dichte ist geometrisch ident mit der, durch den (von der "Stärke" des Noises, ausgedrückt durch Q , abhängigen) Faktor N normierten, "auf den Kopf gestellten" Potentialfunktion $V(y,k)$. Das bedeutet insbesondere, daß die Singularitätsstruktur der Potentialfunktion und der steady-state-Verteilung im Sinne von mode und antimode übereinstimmen (siehe Abbildung 5).

Allerdings hängt - wie bereits erwähnt - die genaue Gestalt der steady-state-Verteilung $f_s(y,k)$ von der jeweils gegebenen Größenordnung der Diffusionskonstanten Q ab.

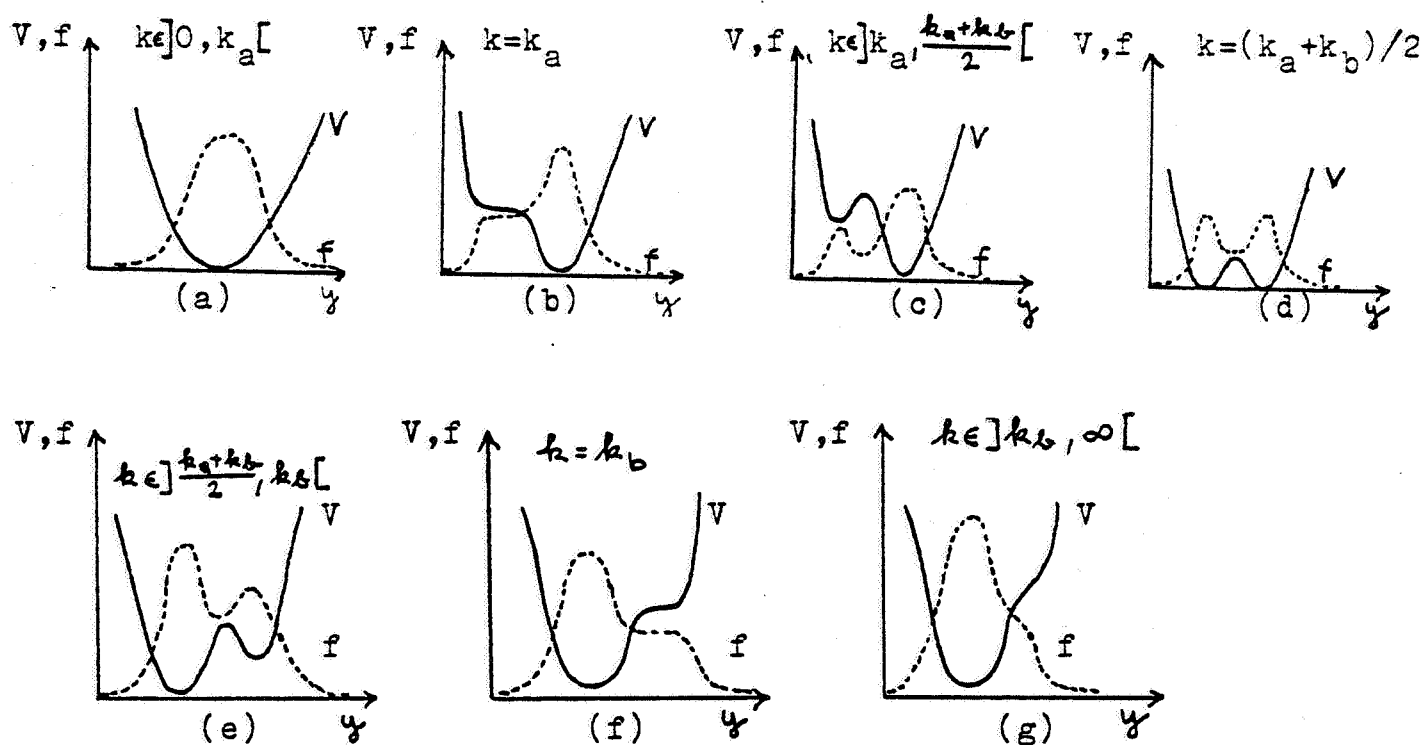
In Abbildung 5 ist eine Serie von möglichen steady-state-Dichten für verschiedene Parameter k , jedoch konstanten Diffusionsterm Q abgebildet.

Die inverse Übereinstimmung der Singularitätsstrukturen ist natürlich eine Konsequenz der rigiden Annahmen hinsichtlich des stochastischen Terms, insbesondere die einer konstanten Varianz.

Wäre Q keine Konstante, sondern eine Funktion der Zufallsvariablen y , so wäre die Übereinstimmung von "mode und antimode" - wie leicht zu zeigen ist - im allgemeinen nicht mehr gegeben.¹⁹⁾

19) Vgl. Cobb/Watson (4), S. 313

Abbildung 5



In Abbildung 5 ist der meritorische Unterschied zum deterministischen K-V-Modell nun deutlich zu erkennen. Im K-V-Modell gilt - wie bereits oben erwähnt - die für elementare Katastrophenmodelle typische Delay-Convention.

Das entgegengesetzte Extrem zur Delay-Convention ist die sogenannte Maxwell-Convention. Nach dieser Konvention oder "Rule" tendiert das dynamische System dorthin, wo die Potentialfunktion ihr globales Minimum hat.²⁰⁾

Im stochastischen K-V-Modell, insbesondere unter den vorliegenden stochastischen Annahmen gilt nun nichtmehr die Delay-Convention der deterministischen Katastrophentheorie, aber auch nicht das andere Extrem der Maxwell-Rule. Zwischen diesen beiden Extremen liegt im vorliegenden Zusammenhang gleichsam die Fokker-Planck-Gleichung (6').

20) Siehe zu diesen beiden Konventionen vor allem Gilmore (10), S.146

Je nach der "Stärke" des Noises tendiert im vorliegenden Fall das dynamische System bzw. die schnelle Variable y einmal mehr dazu, sich eher an der Delay-Convention, das andere Mal sich eher mehr an der Maxwell-Rule zu orientieren.

Dies bedeutet im Klartext, daß im vorliegenden Zusammenhang im Gegensatz zum deterministischen Modell es nicht mehr möglich ist, eine Bifurkations- oder Katastrophenmenge zu definieren. Die Katastrophenmenge, die im Rahmen des K-V-Modells gleichgedeutend ist mit der Menge der konjunkturellen Wendepunkte, ist in der vorliegenden Version gleichsam zu einer fuzzy set degeneriert.²¹⁾

Es treten somit im Rahmen dieses stochastischen Modells nicht nur bei den Parameterkonstellationen k_a und k_b Katastrophen bzw. spontane konjunkturelle Veränderungen (Rezession oder Aufschwung)-wie im deterministischen Fall -auf, sondern es kann nunmehr bei sämtlichen Parameterwerten $k \in [k_a, k_b]$ zu derartigen qualitativen Systemänderungen kommen, allerdings mit unterschiedlichen, von der Größenordnung der Diffusionskonstanten Q abhängigen Wahrscheinlichkeiten.

4. Zu einigen Implikationen des stochastischen K-V-Modells

Die interessanteste und vielleicht zentrale Implikation der vorliegenden stochastischen Version des K-V-Modells ist die in den Graphen der Abbildung 5 deutlich zum Ausdruck kommende unterschiedliche Bedeutung der erratischen Schwankungen für den jeweiligen Systemzustand bzw. für die "Konjunkturlage", die das Modell jeweils gerade einnimmt. In diesem letzten Abschnitt soll nun dieser besondere Aspekt dieses nichtlinearen stochastischen Konjunkturmodells anhand der Abbildung 5 noch etwas ausführlicher in modellökonomischer Hinsicht kommentiert werden. Nicht zuletzt deshalb, weil sich darin der fundamentale Unterschied zu den linearen, *also nur wenn sie Schwankungspunkte aufweisen* stochastischen Modellen am deutlichsten manifestiert.

Erratische Schwankungen bzw. Zufallsstörungen und deren Wirkung auf die Zustandsvariable in linearen Modellen sind grundsätzlich *mit gleichem Schwankungsmaß* mit den Wirkungen von Zufallsstörungen auf die endogene, schnelle Variable y vergleichbar, wenn der Systemzustand des vorliegenden nichtlinearen Modells sich "sehr weit" von den Bifurkationspunkten d.h. außerhalb des bimodalen Bereiches befindet.

21) Vgl. Gilmore (10), S. 146

Diese Systemzustände sind vergleichbar mit jenen in Abbildung 4 bzw. in Abbildung 5 (a) dargestellten. Für die Parameterkonstellationen $k \ll k_a$ bzw. $k \gg k_b$ nimmt die Trajektoriendichte die Gestalt einer normalverteilungsähnlichen Verteilung bzw. die damit korrespondierende Potentialfunktion ein "U-shape" an.

Wie ebenfalls unmittelbar in diesen Abbildungen zu sehen ist, können in einem derartigen Modellkontext die Zufallsschwankungen zu keinen qualitativen Systemänderungen im Rahmen des K-V-Modells führen, sondern lediglich im Sinne des konjunkturtheoretischen Konzeptes der "Theory of Erratic Shocks" zu Schwankungen um einen stabilen Gleichgewichtspunkt.

Diese Modellsituation ist - wie bereits erwähnt - typisch für stochastische, lineare Konjunktur- bzw. Makromodelle, jedoch - wie die Graphen in Abbildung 5 zeigen - untypisch für nichtlineare Modelle des vorliegenden Typs. Befindet sich nämlich die Zustandsvariable y im bimodalen Bereich, d.h. $k \in (k_a, k_b)$ bzw. liegt dort der "langfristige Gleichgewichtszustand", wie im Rahmen des K-V-Modells angenommen wird, so ändert sich die modellendogene Bedeutung zufälliger Schwankungen für qualitative Systemänderungen im Rahmen dieses Modells entscheidend.

Zufällige Schwankungen können im Rahmen des vorliegenden Modelltyps, befindet sich der Systemzustand im bimodalen Bereich - wie oben bereits erwähnt - konjunkturelle Verzweigungen d.h. qualitative Systemänderungen verursachen. Die Wahrscheinlichkeit dafür hängt natürlich von der Stärke bzw. Größenordnung des Noises ab. Das bedeutet, daß die Zufallsschwankungen der schnellen Variablen y in diesem bimodalen Bereich im Zusammenhang mit der "konjunkturellen Lage", die die Modellökonomie letztlich (kurzfristig) einnimmt, von grundsätzlich anderer, nämlich entscheidender Bedeutung sind als für jene in Abbildung 4 bzw. in Abbildung 5 (a), (g) dargestellten Modellzusammenhänge, insbesondere auch dann, wenn die Intensität der Zufallsschwankungen von der Zufallsvariablen y unabhängig und darüber hinaus als konstant, wie im vorliegenden Zusammenhang, angenommen wird.

Anschaulich gesprochen ist somit das vorliegende stochastische K-V-Modell innerhalb des bimodalen Bereiches, was seine unmittelbare konjunkturelle Lage d.h. seinen qualitativen Systemzustand anlangt gegenüber einem gleichintensiven Zufallsschock wesentlich anfälliger als außerhalb dieses Bereiches.

Das vorliegende Modell hat somit eine unterschiedliche Fähigkeit Schocks und Zufallsstörungen zu absorbieren. Man kann somit diese stochastische Version des K-V-Modells als ersten einfachen Versuch ansehen, drei unterschiedliche konjunkturtheoretische Hypothesen, nämlich das Leijonhufvud'sche Konzept der Korridorstabilität, die Überinvestitionshypothese und die Hypothese der erratischen Schocks innerhalb eines Modells zu verbinden.

Die konkrete Bedeutung von jedem einzelnen dieser drei Argumente im Zusammenhang mit dem jeweiligen Systemkontext bzw. für die jeweilige Konjunkturlage dieser Modellökonomie hängt - wie anhand der Graphen in Abbildung 5 deutlich zu sehen ist - letztlich wesentlich von der "Lage" des langfristigen Gleichgewichtszustandes, dem Ausmaß der jeweiligen Überinvestition bzw. Desinvestition und natürlich von der Größenordnung der Zufallsstörungen bzw. des Noises ab. Es ist dies somit letztlich eine Frage der konkreten Parameterkonstellation des Modells.

Dies leitet zu einer weiteren wichtigen vor allem ökonomischen Implikation dieser Art der nichtlinearen Modellierung im allgemeinen und dieses stochastischen K-V-Modells im besonderen über, auf die abschließend noch kurz hingewiesen werden soll, nicht zuletzt deshalb, weil darin ebenfalls ein fundamentaler Unterschied zur "Ideologie" der linearen Modellierung offenkundig wird.

Aus der Abbildung 5 ist ersichtlich, daß im Rahmen des vorliegenden stochastischen K-V-Modells makroskopische, d.h. statistische Aussagen auf der Basis von Erwartungswerten - die übliche Praxis der

an linearen Funktionalzusammenhängen orientierten "Mainstream-Ökonometrie" - im relevanten, d.h. bimodalen Bereich nicht mehr repräsentativ sind.

Um derartige nichtlineare Modelltypen wie das vorliegende doch schätztechnisch einigermaßen "sinnvoll" behandeln zu können, bedarf es daher zum Teil formal aufwendiger Adaptionen von Verfahren und Techniken aus dem Bereich der nichtlinearen Ökonometrie bzw. Biometrie, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.²²⁾

Für diesen Zweig der statistischen Schätztheorie gilt jedoch im besonderen, was für die Katastrophentheorie und ihre Anwendung im Bereich der Ökonomie im allgemeinen gilt, nämlich, daß sie noch am Beginn ihrer Entwicklung steht und die Möglichkeiten im einzelnen daher derzeit noch sehr schwer abzuschätzen sind. Erste Fortschritte bei dem Versuch, die sogenannte statistische Katastrophentheorie in das Gebäude der traditionellen Ökonometrie zu integrieren, lassen jedoch hoffen, daß bereits in naher Zukunft eine einigermaßen leistungsfähige, standardisierte Schätz- und Testtheorie für eine Reihe von auch empirisch relevanten Katastrophenmodelltypen zur Verfügung stehen wird.²³⁾

22) Einen Überblick über den "state of art" der statistischen Katastrophentheorie zu Beginn der 80er Jahre geben vor allem die Arbeiten von Cobb(3) und Cobb/Watson(4).

23) Siehe dazu vor allem Cobb (3), Cobb/Watson (4), Fischer (6) und Fischer/Jammernegg (7) und die dort zitierte Literatur.

Literaturhinweise

BOLDRIN, M.(1): Applying Bifurkation Theory: Some Simple Results of Keynesian Business Cycle, Note di Lavoro, Dipartimento di Scienze Economiche, Università degli Studi di Venezia, 1984

CHANG,W.W./SMYTH,D.J.(2): The Existence and Persistence of Cycles in a Non-linear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined, The Review of Economic Studies, Jan., 1971

COBB,L.(3): Stochastic Catastrophe Models and Multimodal Distributions, Behavioral Science 23, 1978

COBB,L./WATSON,B.(4): Statistical Catastrophe Theory: An Overview, Mathematical Modelling, Vol. 1, 1980

FISCHER,E.O.(5): Katastrophentheorie und ihre Anwendung in der Wirtschaftswissenschaft, Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Bd.(Vol.) 200/1, 1985

FISCHER, E.O.(6): Empirical Investigation of a Catastrophe Theory Extension of the Phillips-Curve, mimeo, University of Graz, Austria, 1985

FISCHER,E.O./JAMMERNEGG,W.(7.): Is the Phillips Curve a Catastrophe? A Likelihood Ratio Test for the Choice Between Traditional and Cusp Models, mimeo, University of Graz, Austria, 1985

GANDOLFO,G.(8): Feedback Policy Rules in a Continuous Time Macroeconomic Model of the Italian Economy, in Feichtinger,G.(Ed.): Optimal Control Theory and Economic Analysis 2, North-Holland,1985

GANDOLFO,G./PADOAN,P.C.(9): A Disequilibrium Model of Real and Financial Accumulation in an Open Economy Theory, Springer Verlag,1985

GILMORE,R.(10): Catastrophe Theory for Scientists and Engineers, John Wiley & Sons, New York et al., 1981

GOODWIN,R.M.(11): The Nonlinear Accelerator and the Persistence of Business Cycles, Econometrica, Jan., 1951

HAKEN,H.(12): Advanced Synergetics - Instability Hierarchies of Self-Organizing Systems and Devices, Springer, Berlin-Heidelberg-Tokyo, 1983

HICKS,J.R.(13): A Contribution to the Theory of the Trade Cycle, Oxford University Press, 1950

HIRSCH,M.W./SMALE,S.(14): Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1974

JUDGE,G.G./GRIFFITHS,W./HILL,R.C./LEE,T.C.(15): The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley & Sons, New York et.al., 1980

KALDOR,N.(16): A Model of the Trade Cycle, Economic Journal,50, 1940

17 Nelson (17)
18 Hill (18)

LEIJONHUFVUD,A.(17): Effective Demand Failures, Swedish Journal of Economics, 1973

²⁰
MEDIO,A.(18): Synergetics and Dynamic Economic Models, Note di Lavoro, Dipartimento die Scienze Economiche, Università degli Studi Venezia, 1984

²¹
PHILLIPS,A.W.(19): A Simple Model of Employment, Money and Prices in a Growing Economy, Economica, Nov., 1961

²²
ROSE,H.(20): On the Non-linear Theory of the Employment Cycle, Review of Economic Studies, 34, 1967

²³
SOONG,T.T.(21): Random Differential Equations in Science and Engineering, Academic Press, New York and London, 1973

²²
URSPRUNG, H.W. (22): Die elementare Katastrophentheorie: Eine Darstellung aus der Sicht der Ökonomie, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1982

²³
VARIAN, H.R. (23): Catastrophe Theory and the Business Cycle, Economic Inquiry, 17, 1979

²⁴
VARIAN, H.R. (24): Dynamical Systems with Applications to Economics, in Arrow, K./Intriligator, M. (Eds.): Handbook of Mathematical Economics, Vol. 1, North-Holland Publishing Company, 1982

²⁵
ZEEMAN, E.C. (25): Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977, Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1977