

**Zur strukturellen Instabilität eines  
nichtlinearen Kreditmarktmodells**

Franz R. Hahn

April 1984

**Zur strukturellen Instabilität eines  
nichtlinearen Kreditmarktmodells**

Franz R. Hahn

WIFO Working Paper 3, April 1984

Österreichisches Institut für Wirtschaftsforschung  
Austrian Institute of Economic Research

**Zur strukturellen Instabilität eines  
nichtlinearen Kreditmarktmodells**

Franz R. Hahn

WIFO Working Paper 3, April 1984

Österreichisches Institut für Wirtschaftsforschung  
Austrian Institute of Economic Research

ZUR STRUKTURELLEN STABILITÄT EINES NICHTLINEAREN KREDITMARKT-  
MODELLS BEI UNSICHERHEIT

Eine einfache Anwendung der elementaren Katastrophentheorie

1. Einleitung

In dem vorliegenden Beitrag wird versucht, jene strukturellen Instabilitäten, die sich in Gestalt von Diskontinuitäten des Gleichgewichtszinssatzes im Rahmen eines einfachen, nichtlinearen Kreditmarktmodells in Folge von stetig zu(ab)nehmender Unsicherheit bezüglich spezifischer Entscheidungsvariablen manifestieren, mit Hilfe der Theorie der elementaren Katastrophen zu analysieren.<sup>1)</sup> Dem Modell liegen einfache Hypothesen hinsichtlich des Verhaltens der kreditnachfragenden (repräsentativen) Firma - die Kreditnachfrage der privaten Haushalte wird in der nachfolgenden Modellanalyse nicht berücksichtigt - und der kredit anbietenden (repräsentativen) Bank unter Unsicherheit zu Grunde. Beide "Akteure" maximieren den Erwartungswert ihres langfristigen Brutto-Gewinns, wobei sich die kreditnachfragende Firma einer Outputpreisunsicherheit und die kredit anbietende Bank sich einem unsicheren, langfristigen Bruttogewinn der kreditnachfragenden Firma gegenüber sieht.

Die Notiz ist folgendermaßen strukturiert: Nach einer knappen Darstellung der Grundzüge der elementaren Katastrophentheorie (Kapitel 2), wird im 3. Kapitel ein einfaches, nichtlineares (Gleichgewichts-)Kreditmarktmodell unter Unsicherheit konzipiert und katastrophanalytisch, d.h. insbesondere auf die, durch zu- bzw. abnehmende Unsicherheit bedingten Verhaltensänderungen der Kreditanbieter und -nehmer verursachten, lokal-dynamischen Stabilitätseigenschaften seiner Gleichgewichtszustände hin untersucht.

---

1) Die mathematische Theorie der elementaren Katastrophen wurde von dem französischen Mathematiker René Thom Ende der 60er Jahre entwickelt und ist mittlerweile auch in einigen Bereichen der mathematischen Wirtschaftstheorie auf Aufmerksamkeit und Interesse gestossen (vgl. u.a. Balasko(2);Blad(3);Blad/Zeeman(4);George(10); Ursprung(22);Varian(23),(24))

## 2. Zur Theorie der elementaren Katastrophen - eine Skizze

In der nachfolgenden Skizze wird nur die Grundidee der Katastrophentheorie dargelegt, nicht zuletzt deshalb, weil im Rahmen dieser Zeitschrift bereits in dem Übersichtsartikel von E.O.Fischer (8) eine umsichtige Darstellung dieser Theorie aus der Sicht der Ökonomie vorliegt. Darüber hinaus existiert bereits seit Jahren eine umfangreiche und zum Teil ausgezeichnete Einführungs- und Übersichts-literatur zu dieser Theorie, auf die in diesem Zusammenhang verwiesen werden kann (siehe dazu die entsprechenden Literaturhinweise am Ende dieses Artikels).

Bei der nachfolgenden Skizze der Katastrophentheorie gehen wir - Fischer(8) folgend - von einem differenzierbaren dynamischen System  $F: Y \times C \rightarrow Y$ ,  $(y(t), a) \mapsto F(y(t), a) = \dot{y}$ ,  $\dot{y} := \frac{dy}{dt}$ , aus, wobei  $Y$  eine offene Teilmenge des Zustandsraumes  $R^n$ , d.h.  $Y \subset R^n$ ,  $C$  eine offene Teilmenge des Parameterraumes  $R^m$ , d.h.  $C \subset R^m$ ,  $y \in Y$  der Zustandsvektor,  $a \in C$  der Parametervektor, und  $F$  eine Abbildung ist. Aus der Theorie der Differentialgleichungen ist bekannt, daß die Lösungskurven bzw. Trajektorien und der sogenannte Fluß  $\Phi_t = T(y, t)$ ,  $T: Y \times R \rightarrow Y$  des differenzierbaren dynamischen Systems  $(Y, C, F)$  unter den gegebenen Bedingungen eindeutig definiert sind bzw. ist. Die topologische bzw. qualitative Struktur des Flusses  $T: Y \times R \rightarrow Y$  hängt nun von der Art des Attraktors bzw. Repellers (z.B.: stabile/instabile Fixpunkte oder stabile/instabile Grenzzyklen) und des ihn "umgebenden" Attraktions- bzw. Repellionsbereiches ab. Der zentrale Begriff in diesem Zusammenhang ist nun jener der Struktur-stabilität des differenzierbaren dynamischen Systems  $(Y, C, F)$  bzw. dessen Flusses  $\Phi_t$ . Das System  $(Y, C, F)$  ist strukturell stabil, wenn der Fluß  $\Phi_t$  jedes dynamischen Systems in einer Umgebung von  $(Y, C, F)$  topologisch äquivalent  $\Phi_t$  ist, d.h. wenn eine bijektive, stetige Abbildung  $\Phi'_t \rightarrow \Phi_t$  existiert, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist. Anschaulich bedeutet dies, daß sich die Phasen-portraits sämtlicher dynamischer Systeme in dieser Umgebung qualitativ ähneln, d.h. etwa dieselbe Anzahl und Art des Attraktors haben.<sup>2)</sup>

---

2) Die in diesem Abschnitt verwendeten Begriffe entstammen der sogenannten qualitativen oder geometrischen Theorie der Differentialgleichungen. Eine gute einführende Darstellung dieser Theorie vermittelt V.I.Arnol'd (1) bzw. M.Hirsch/S.Smale (13).

Der Parameterraum  $C \subset \mathbb{R}^m$  kann nun unter den gegebenen Voraussetzungen in eine offene Teilmenge  $S \subset C$  und deren Komplementmenge  $K = C - S$  unterteilt werden. Die offene Teilmenge  $S$  korrespondiert mit den strukturell stabilen Systemen und die Komplementmenge  $K$  mit den strukturell instabilen Systemen. Die Menge  $K$  wird nun bezeichnenderweise Katastrophen- oder Bifurkationsmenge genannt, da bei einem Parameterwechsel von  $S$  nach  $K$  sich die qualitative bzw. topologische Struktur des Flusses  $\Phi_t$  ändert.

Das Ziel der allgemeinen Katastrophentheorie ist nun die Klassifikation sämtlicher Möglichkeiten eines dynamischen Systems, sein Phasenportrait qualitativ zu ändern. Bisher ist dies "nur" für so genannte Gradientensysteme, also dynamische Systeme, deren Fluß von einer Potentialfunktion gesteuert wird, einigermaßen zu friedensstellend, d.h. lokal gelungen und hier auch nur für die Gleichgewichtskonfigurationen der Gradientensysteme.<sup>3)</sup>

Dieser Bereich der allgemeinen Katastrophen- oder Bifurkationstheorie wird eben wegen dieser Einschränkung elementare Katastrophentheorie genannt.

Im Rahmen der elementaren Katastrophentheorie läßt sich nun mit Hilfe des zentralen Theorems dieser Theorie, dem sogenannten Klassifikationstheorem zeigen, daß die Gleichgewichtskonfiguration oder -fläche von Gradientensystemen mit fünf oder weniger Parametern in der Umgebung von Katastrophen- oder Bifurkationspunkte sich in elf Äquivalenzklassen zerlegen lassen.<sup>4)</sup> Jede dieser elf Äquivalenzklassen repräsentiert eine sogenannte Elementarkatastrophe, die sich durch ein einfaches mathematisches Konstrukt, der sogenannten kanonischen Form darstellen läßt.<sup>5)</sup>

---

3) Bezüglich der Definition des Gradientensystems siehe Fischer (8), S. 7. Eine umfassende formale Darstellung dieser speziellen dynamischen Systeme findet sich in M.Hirsch/S.Smale (13) und in H.Varian (24).

4) Siehe Ursprung (22), S. 153 ff bzw. S. 298

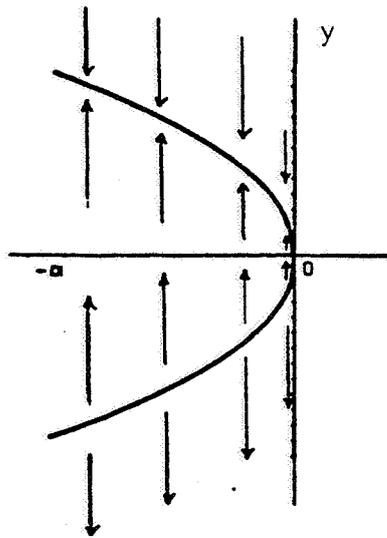
5) Eine einfache Darstellung und Beschreibung der Geometrie der Elementarkatastrophen und der kanonischen Formen der Gleichgewichtsflächen findet sich u.a. in dem Übersichtsartikel von Fischer (8).

Die einfachste Elementarkatastrophe, auf die wir uns letztlich auch im Zusammenhang mit dem zu diskutierenden Kreditmarktmodell beziehen, ist die sogenannte Faltenkatastrophe. Die kanonische Form der Gleichgewichtsfläche dieser Elementarkatastrophe hat die folgende einfache Gestalt <sup>6) 6a)</sup>

$$(1) \quad y^2 - a = 0 \quad \left( = \frac{dy}{dt} = - \frac{dV(y,a)}{dy} \right)$$

Die Gleichgewichtsfläche bzw. -kurve der Falte in der Umgebung des Katastrophepunktes, korrespondierend zur kanonischen Form (1), ist in Abbildung 1 dargestellt

Abbildung 1



Der obere, "positive" Ast der Gleichgewichtskurve repräsentiert die lokal dynamisch stabilen Gleichgewichtspunkte, d.h. die lokalen Minima jener Potentialfunktion  $V(y,a)$  usw. in Abhängigkeit vom Parameter  $a$ , die den Fluß des für die Faltenkatastrophe typischen einparametrischen Gradientensystems steuert.

---

6) Siehe dazu Fischer (8), S. 8

6a) Der Klammerausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (1) soll darauf hinweisen, daß wir es im vorliegenden Zusammenhang mit der Gleichgewichtsfläche bzw. -kurve eines Gradientensystems zu tun haben. Die Funktion  $V(y,a)$  repräsentiert die Potentialfunktion.

Geometrisch sind diese lokalen Stabilitätsbedingungen durch die, in Richtung der Kurve weisenden Anpassungspfade angedeutet.

Der untere, "negative" Ast der Gleichgewichtsfläche repräsentiert hingegen die Menge der lokal dynamisch instabilen Gleichgewichtszustände (d.h. die lokalen Maxima der Potentialfunktion  $V(y,a)$ ), angedeutet durch die, von der Kurve wegweisenden Pfeile. Aus dieser Darstellung ist nun unmittelbar ersichtlich, daß bei dem Parameterwert  $a=0$  sich das Phasenportrait - angedeutet durch die Richtungsänderung der Pfeile - topologisch bzw. qualitativ ändert. Der Parameter  $a=0$  ist daher ein Element der Katastrophenmenge  $K$ .

Formal versteht man nun unter der Katastrophenmenge usw. im konkret vorliegenden Zusammenhang mit der Faltenkatastrophe, die Menge all jener Parameterkonstellationen, bei denen die Potentialfunktion  $V(y,a)$  "degenerierte" Singularitäten aufweist, d.h. bei denen ein Minimum mit einem Maximum zusammenfällt.

Die Darstellung der Katastrophenmenge in der Notation der Mengenlehre hat nun folgende Gestalt

$$(2) \quad \left\{ a \in \mathbb{R} \ / \ \frac{dV(y,a)}{dy} = \frac{d^2V(y,a)}{dy^2} = 0 \right\}$$

Das Auffinden dieser Menge, d.h. der Menge aller Katastrophenpunkte ist nun charakteristisch für die sogenannte Katastrophenanalyse eines, wie im nächsten Abschnitt zu diskutierenden, hinreichend spezifizierten Modells. Die Katastrophenanalyse ist neben der sogenannten Katastrophenmodellierung eine der beiden möglichen Anwendungsarten der Katastrophen-theorie. E.O.Fischer charakterisiert die Katastrophenanalyse in seinem, bereits mehrfach zitierten Survey (Fischer(8)) folgendermaßen: "Erstere (d.h. die Katastrophenanalyse, F.H.) geht von den Differentialgleichungen hinreichend spezifizierter Modelle aus und versucht mit Hilfe herkömmlicher Analyseverfahren auf das Verhalten dieser Modelle zu schließen. Das Hauptaugenmerk ist hierbei auf eventuell auftretende Katastrophenereignisse gerichtet.... Durch diesen Rückgriff auf die zugrunde - liegenden Differentialgleichungen versucht somit die Katastrophenanalyse, eine Erklärung für das Systemverhalten bei Auftreten von Katastrophen zu geben" (Fischer (8), S. 14).

Die Katastrophenanalyse hat darüber hinaus den Vorteil, daß sie nicht nur, wie die Katastrophenmodellierung, auf Gradientensysteme beschränkt ist. Von diesem Vorteil wollen wir bei der nachfolgenden Katastrophenanalyse eines nichtlinearen Kreditmarktmodells explizit Gebrauch machen.

### 3. Katastrophenanalyse eines nichtlinearen Kreditmarktmodells

#### bei Unsicherheit

##### Das Modell

Wir gehen davon aus, wie eingangs erwähnt, daß sowohl die kreditnachfragende, repräsentative Firma als auch die kredit anbietende, repräsentative Bank gegenüber Risiko neutral ist, d.h. beide Marktteilnehmer wählen ihre Entscheidungsparameter so, daß der Erwartungswert ihres langfristigen Gewinns ein Maximum erreicht.

Hinsichtlich der kreditnachfragenden Firma unterstellen wir nun eine Produktionsfunktion, die folgenden "Standardbedingungen" genügen soll<sup>7)</sup>

$$(1a) \quad Q = Q(K, L)$$

$$(2a) \quad Q_K, Q_L > 0$$

$$(3a) \quad Q_{KK}, Q_{LL} < 0 \quad \text{und}$$

$$Q_{KK} Q_{LL} - Q_{KL}^2 > 0$$

wobei Q den Firmenoutput, K den Faktor Kapital und L den Faktor Arbeit repräsentiert. Die Bedingungen (2a) und (3a) implizieren, daß die Produktionstechnologie der Firma strikt konkav ist.

Weiters sei der Preis des Outputs der Firma bloß "stochastisch" vorgegeben, d.h. der Outputpreis p ist aus der Sicht der Firma eine Zufallsvariable.<sup>8)</sup>

---

7) Für die Darstellung der partiellen Differentialquotienten verwenden wir durchwegs die Subskriptnotation.

8) Instabile bzw. unsichere Outputpreise sind beispielsweise auf einem kompetitiven Markt Ausdruck einer unsicheren bzw. instabilen Nachfrage (vgl. dazu z.B. Oi (18) ).

Hinsichtlich des Faktors Kapital  $K$  nehmen wir an, daß dieser Inputfaktor im Gegensatz zum Faktor Arbeit  $L$  quasi-fix ist, d.h. daß die Entscheidung über den Kapitaleinsatz auf der Grundlage der Wahrscheinlichkeitsverteilung über den Outputpreis  $p$  getroffen werden muß.

Unter dem Gesichtspunkt der Risikoneutralität ist nun jener Kapitaleinsatz bzw.-input  $K$  zu wählen, der den Erwartungswert  $E$  des "long-run profits" maximiert, d.h.

$$(4a) \quad E[x(K, p, w^0, c^0)] = E[g(K, p, w^0)^*] - c^0 K \rightarrow \max$$

$$g(K, p, w^0)^* = [pQ(K, L^*(K, p, w^0)) - w^0 L^*(K, p, w^0)]$$

wobei  $x$  den langfristigen Brutto-Gewinn,  $w^0$  die gegebenen Arbeitskosten,  $c^0$  die gegebenen Kapitalkosten und  $L^*$  den optimalen Arbeitsinput, d.h. jenen Arbeitsinput, der die kurzfristige Gewinnfunktion  $g(K, p, w^0)$  maximiert, repräsentiert.

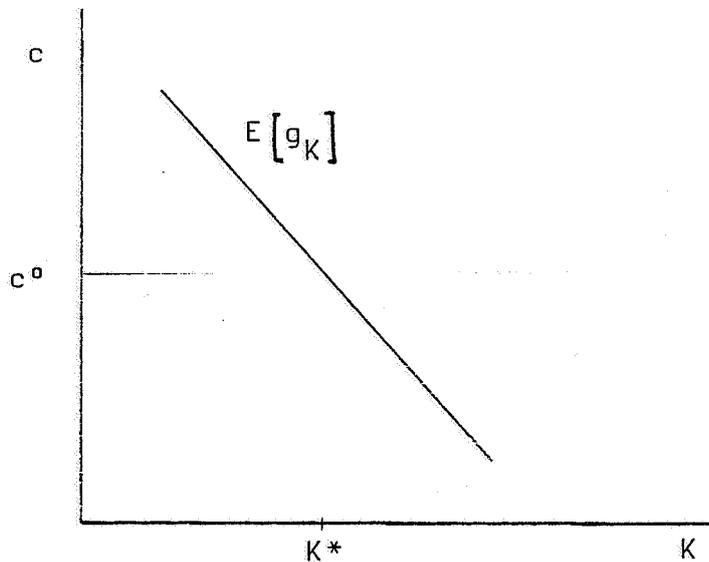
Das Modell (4a) wurde insbesondere von R. Hartman (10) hinsichtlich der Auswirkungen einer zunehmenden Preisunsicherheit auf das Faktornachfrageverhalten ausführlich diskutiert und analysiert.

In unserem Zusammenhang ist vor allem die Auswirkung zunehmender Preisunsicherheit auf das Nachfrageverhalten der Firma nach dem Faktor Kapital von Interesse. Es besteht nun, wie sich leicht zeigen läßt, im vorliegenden Kontext ein negativer Zusammenhang zwischen den Kapitalkosten bzw. user costs  $c$  und dem Kapitalinput  $K$ , der jeweils den Erwartungswert  $E$  des long-run profits der Firma maximiert (siehe nachstehende Abbildung).<sup>9)</sup>

---

<sup>9)</sup> Evidentermaßen gilt:  $E[g_K] = c$  und  $E[g_{KK}] < 0$

Abbildung 2



Wie sich nun im Rahmen des vorliegenden Modells eine steigende (Output-) Preisunsicherheit auf das Kapitalnachfrageverhalten der Firma auswirkt, hängt (natürlich) davon ab, wie "steigende Unsicherheit" definiert wird und - darüber hinaus - welcher funktionaler Zusammenhang zwischen  $g_K$  und der Variablen  $p$ , dem Outputpreis besteht.

Wir verwenden in der vorliegenden Notiz als Kriterium wachsender Unsicherheit das mean-preserving-spread-Kriterium von Rothschild/Stiglitz.<sup>10)</sup> Dieses Kriterium ist folgendermaßen definiert: Ausgehend von einer Familie von Verteilungsfunktionen  $G(p, \alpha)$ , wobei  $\alpha$  einen Shift-Parameter bzw. ein Element einer (mehrelementigen) Indexmenge darstellt, bedeutet eine positive Veränderung des Shift-Parameters  $\alpha$  ein "mean preserving increase in risk", wenn folgendes gilt:

---

10) Siehe dazu Rothschild/Stiglitz (19) bzw. Diamond/Stiglitz (6)

$$(5a) \quad \int_0^1 G_{\alpha}(p, \alpha) dp = 0$$

$$(6a) \quad \int_0^{\mu} G_{\alpha}(p, \alpha) dp \geq 0, \quad 0 \leq \mu \leq 1$$

Das mean-preserving-spread-Kriterium ((5a) und (6a)) impliziert nun im vorliegenden Zusammenhang, falls  $g_K$  konvex (konkav) hinsichtlich des Outputpreises  $p$  verläuft, daß zunehmende Preisunsicherheit zu einem höheren (niedrigeren) Kapitalinput unter dem Gesichtspunkt der Risikoneutralität führt. Das bedeutet, daß sich eine zunehmende (Output-)Preisunsicherheit etwa bei Vorliegen von Konvexität im obigen Sinn und Risikoneutralität in einem positiven Shift der Kapitalgüternachfragefunktion der Firma niederschlägt.

Es läßt sich zeigen, daß diese Konvexitätsbedingung unter den gegebenen Annahmen etwa von der, in der Modellökonomie häufig verwendeten Klasse der homogenen Produktionsfunktionen erfüllt wird.<sup>11)</sup> Wir unterstellen im folgenden, daß die Produktionsfunktion (1a) der kreditnachfragenden Firma zur Klasse der homogenen Produktionsfunktion gehören möge.

Auf der Grundlage dieses Unternehmens- bzw. Produktionsmodells definieren wir nun das Kreditnachfrageverhalten der Firma dergestalt, daß wir vereinfachend annehmen, die Firma finanziert zur Gänze den gewünschten Kapitaleinsatz durch Fremdkapital, d.h. durch Bankkredite (ein fixer Eigenfinanzierungsanteil würde die Ausgangssituation nur unwesentlich verändern).

---

11) Siehe dazu Hartman (12), S. 678

Unter dieser Bedingung ist die Kreditnachfragefunktion der Firma identisch gleich der Nachfragefunktion nach Kapitalinput, wobei sich die user costs  $c$  ceteris paribus auf den Kreditzinssatz  $r$  bzw.  $1+r=R$  reduzieren lassen auf Grund des streng monoton wachsenden funktionalen Zusammenhangs zwischen  $c$  und  $r$ .

Wir können nun die Kreditnachfragefunktion der Firma in Abhängigkeit vom Kreditzinssatz  $R$  und dem Shift- bzw. Unsicherheitsparameter  $\alpha$  wie folgt definieren

$$(7a) \quad D: ]1, \infty[ \times ]\alpha_a, \alpha_b] \rightarrow \mathbb{R}_{++}, (R, \alpha) \mapsto D(R, \alpha)$$

$$\text{wobei } D \in C^{r \geq 1}, ]1, \infty[ \subset \mathbb{R}, [\alpha_a, \alpha_b] \subset \mathbb{R}$$

$$(8a) \quad D_R < 0, \quad D_{RR} \geq 0$$

$$D_\alpha > 0$$

Wesentlich in diesem Zusammenhang ist nun vor allem die eindeutig bestimmte Relation zwischen gewünschtem Kapitalinput bzw. Projektgröße  $K^*$  und dem gewünschtem "Umfang" des Kredits und daher auch zwischen dem Kreditvolumen und dem erwarteten, langfristigen Brutto-Gewinn der Firma. Auf diesen Umstand muß bei der Deduktion der "optimal loan size offer curve" der Bank explizit Rücksicht genommen werden, da die Bank ja ihrerseits annahmemaß den Erwartungswert ihres Brutto-Gewinns auf der Basis des unsicheren, von der kreditnachfragenden Firma erwirtschafteten Cash-Flow-Endwertes bzw. erwarteten langfristigen Brutto-Gewinns  $x$ , der auch von der jeweiligen Projektgröße mitbeeinflusst wird, maximiert. Bei der Ableitung der Kreditangebotsfunktion, die variablen Projektgrößen Rechnung trägt, wollen wir analog zu D. Jaffee's Verallgemeinerung der "optimal loan offer curve" des Jaffee-Modigliani-Kreditrationierungsmodells vorgehen.<sup>12)</sup>

---

12) Siehe dazu Jaffee (15), S.57 ff. Hinsichtlich des Jaffee - Modigliani-Modells siehe auch Jaffee/Modigliani (16).

Dazu formulieren wir den funktionalen Zusammenhang zwischen dem möglichen Umfang des Investitionsprojektes  $K$  und dem erwarteten Cash-Flow-Endwertes bzw. langfristigen Brutto-Gewinn der kreditnachfragenden Firma aus der Sicht der Bank, d.h. unabhängig von der "effektiven" Kreditnachfrage der Firma, wie folgt

$$(9a) \quad x = (\rho[K]y)K$$

wobei  $y$  die Zufallsvariable "Return on Investment" repräsentiert, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung unabhängig vom Umfang des Investitionsprojektes ist. Die Funktion  $\rho[K]$  stellt eine deterministische "Adjustment function" in Abhängigkeit vom Umfang des Investitionsprojektes  $K$  der Firma dar, die korrespondierend zu den Annahmen (1a)-(4a) folgenden Bedingungen genügt

$$(10a) \quad \rho_K[K] \leq 0$$

$$(11a) \quad \delta = (K\rho[K])_K \geq 0, \quad \delta_K = \delta_K \leq 0$$

Hinsichtlich der bedingten Dichtefunktion der Zufallsvariablen  $y$ ,  $g(y, \alpha) \in C^{r \geq 1}$  nehmen wir folgendes an: Es gibt ein  $v$  bzw.  $V$ ,  $0 \leq v < V < \infty$  für die gilt:

$$(12a) \quad g(y, \alpha) = 0 \text{ für } y \leq v \text{ oder } V \leq y$$

ferner sei

$$(13a) \quad G(y, \alpha) := \int_v^V g(y, \alpha) dy, \text{ wobei } G_\alpha(y, \alpha) \geq 0$$

Unter den getroffenen Annahmen läßt sich nun die "expected profit function" der Bank wie folgt formulieren, wobei das Kreditangebot  $S$  im vorliegenden Zusammenhang identisch gleich der Projektgröße  $K$  ist <sup>13)</sup>

$$(14a) \quad E[q] = S(R-I) - S \cdot p[S] \int_V^{\beta} G(y, \alpha) dy$$

wobei  $E[q]$  den Erwartungswert des Gewinns der Bank,  $SR$  der zu tilgende Endwert des zu gewährenden Kreditvolumens  $S$  und  $IS$  die Opportunitätskosten der Bank repräsentiert, ferner symbolisiert  $I := 1+i$ ,  $i$  den Opportunitätskostensatz und  $\beta := (RS/p(S)) \cdot S$ .

Das Gewinnfunktional (14a) läßt sich in drei disjunkte Terme untergliedern, wobei ein Term den Brutto-Erlös des Kreditunternehmens ausdrückt, wenn der Cash-Flow-Endwert des Kreditnehmers ausreicht, um den Endwert des Kreditvolumens voll zu tilgen. Der zweite Term repräsentiert den Brutto-Erlös des Kreditgebers für den Fall, daß der Cash-Flow-Endwert des Kreditnehmers nicht den gesamten Kreditendwert zu tilgen vermag. In diesem Fall wird der gesamte Cash-Flow der Kreditnehmer zur Teiltilgung des Kreditaußenstandes verwendet.

Der letzte Term umfaßt die Opportunitätskosten der Bank, wobei der Einfachheit halber der Opportunitätskostensatz  $i$  konstant und unabhängig vom Kreditzinssatz  $r$  angenommen wird. Letzteres bedeutet, daß die Bank bzw. die Kreditgeber einen unbeschränkten Zutritt zu einem perfekten Kapitalmarkt hat bzw. haben. <sup>14)</sup>

Die Kreditangebotsfunktion bzw. das Angebotsfunktional in  $R$  ist nun bekanntlich die Menge aller Punkte  $(R, S)$ , die (14a) maximieren bei fixen  $g(y, \alpha)$ ,  $\alpha$ ,  $r$  und  $i$ . Formal wird diese Punktmenge durch Differentiation nach  $S$  und Nullsetzen bzw. anschließenden "Auflösen" nach  $S$  eruiert, falls die Bedingung des relativen Maximums erfüllt wird, was im vorliegenden Kontext der Fall ist (siehe (16a)).

---

13) Siehe Jaffee (15), S. 57 ff

14) Der perfekte Kapitalmarkt ist im vorliegenden Kontext nur für Banken zugänglich.

$$(15a) \quad E_S[q] = R(1-G(\beta, \alpha)) + \delta \cdot \int_V^\beta yg(y, \alpha) dy - I = 0$$

$$(16a) \quad E_{SS}[q] = \beta_S \cdot g(\beta, \alpha) (\delta \beta - R) + \gamma \cdot \int_V^\beta yg(y, \alpha) dy < 0$$

Durch implizite Differentiation von (15a) läßt sich zeigen, daß die Kreditangebotsfunktion in  $R$  für  $v < \beta < V$  nichtlinear ist. <sup>15)</sup>

Ferner gilt auf Grund von (5a), (6a), (11a) und (13a)

$$(17a) \quad S_\alpha = \frac{(\delta \beta - R) G_\alpha(\beta, \alpha) - \delta \cdot \int_V^\beta G_\alpha(y, \alpha) dy}{\beta_S g(\beta, \alpha) (\delta \beta - R) + \gamma \cdot \int_V^\beta yg(y, \alpha) dy} < 0$$

(17a) drückt aus, daß eine zunehmende Unsicherheit hinsichtlich der erwarteten Cash-Flow-Endwerte  $x$  der Firma im Sinne des mean-preserving-spread-Kriteriums sich in einer negativen parametrischen Verschiebung der Kreditangebotsfunktion in  $R$  niederschlägt respektive in einem geringeren Kreditangebot der Bank zum gegebenen Zinssatz  $R$ .

Zur Vereinfachung der folgenden Analyse gehen wir nun von folgender Kreditangebotsfunktion in  $R$  aus, die - wie sich leicht zeigen läßt - sämtlichen Implikationen der eben diskutierten Jaffee - Angebotsfunktion für den relevanten Bereich  $R > I$  genügt. <sup>15)</sup>

$$(18a) \quad S: \mathbb{R}_+ / [0, I] \times [\alpha_a, \alpha_b] \rightarrow \mathbb{R}_{++}, \quad (R, \alpha) \mapsto S(R, \alpha)$$

wobei  $S \in C^{r \geq 2}$

---

15) Vgl. dazu Jaffee (15), S. 58 ff

insbesondere soll gelten

$$(19a) \quad S_R \gtrless 0 \quad \text{für} \quad R \gtrless R^*$$

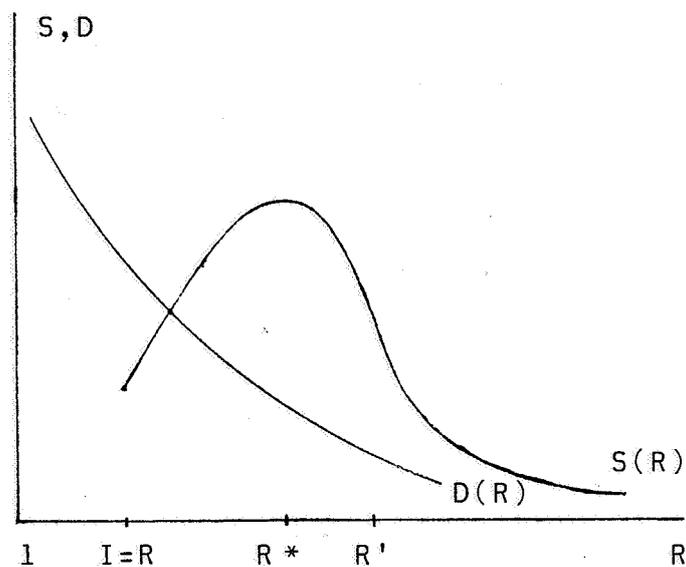
$$S_{RR} \gtrless 0 \quad \text{für} \quad R \gtrless R'$$

$$S_\alpha < 0$$

Die Kreditangebotsfunktion in  $R$  (18a) der Bank weist somit genau ein Maximum bei  $R^*$  und genau einen Wendepunkt bei  $R' > R^*$  auf. Für alle  $R < R'$  ist die Funktion streng konkav (bzw. für alle  $R > R'$  streng konvex).

In Abbildung 3 sind mögliche Graphen der Funktionen (7a) und (18a) dargestellt, unter der Annahme, daß ein Gleichgewicht existiert.

Abbildung 3



## Die Katastrophenanalyse

Die Annahmen, die dem vorliegenden Modell zugrunde liegen, schließen nun-wie unmittelbar ersichtlich-ein pareto-optimales "Rationierungsgleichgewicht" aus. Das bedeutet, daß im vorliegenden Kontext nur jener Marktzinssatz als pareto-optimaler Gleichgewichtszinssatz gilt, der Kreditnachfrage und Kreditangebot egalisiert.

Das vorliegende Kreditmarktmodell kann somit als partielles Gleichgewichtsmodell diskutiert und als solches aus katastrophentheoretischer Sicht analysiert werden.

Um nun die lokal dynamischen Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtszustände dieses Kreditmarktmodells auch hinreichend analysieren zu können, bedarf es noch einer Spezifikation des "tâtonnement" bzw. des Gleichgewichtsanpassungsprozesses.

Wir unterstellen nun folgenden dynamischen Standard-Anpassungsprozess mit einem konstanten Reaktionskoeffizienten  $b$

$$(20a) \quad \dot{R} = [1/b](D(R, \alpha) - S(R, \alpha)) , b > 0$$

Die nichtlineare Differentialgleichung (20a) drückt aus, daß der Kreditzinssatz steigt (fällt), wenn die Kreditnachfrage das Kreditangebot übersteigt (unterschreitet), wobei wir vereinfachend davon ausgehen wollen, daß die Teilmenge  $[\alpha_a, \alpha_b] \subset I$  so definiert ist, daß die Menge aller Kreditzinssätze gegeben sei, die Kreditangebot und -nachfrage ausgleichen.

Wir sind nun in der Lage, die eigentliche Problemstellung dieser Notiz, nämlich die Auswirkungen zu- bzw. abnehmender Unsicherheit im Rahmen dieses Modells, insbesondere auf die lokal dynamischen Stabilitätseigenschaften der Gleichgewichtszustände bzw. auf das qualitative Systemverhalten zu untersuchen.

In der Diktion der Katastrophenanalyse bedeutet dies, sich speziell mit der Frage auseinanderzusetzen, ob im Rahmen des vorliegenden Kreditmarktmodells als Folge zu(ab-)nehmender Unsicherheit, definiert im Sinne des mean-preserving-spread-Kriteriums, lokale Katastrophen auftreten können oder nicht und wenn, ob sich der spezifische Katastrophentyp und die Anzahl der Katastrophenpunkte hinreichend genau identifizieren lassen.

Das qualitative Verhalten des dynamischen Systems (20a) läßt sich nun im vorliegenden Zusammenhang am besten beschreiben, wenn wir eine unendliche Anpassungsgeschwindigkeit ( $b \rightarrow 0$ ) unterstellen.

Durch diese Annahme ist der Kreditmarkt quasi permanent im Gleichgewicht. Dies bedeutet, daß die Spuren der möglichen Gleichgewichtskurven  $R=0$  Aufschluß über die "Gestalt" der möglichen Gleichgewichtskonfigurationen dieses Modells in Abhängigkeit vom Unsicherheitsparameter  $\alpha$  geben.<sup>16)</sup>

Diese  $R=0$ -Kurven bzw. deren typische Spuren können nun durch Differentiation der impliziten Funktion  $F(R, \alpha) = 0$  hinreichend deduziert werden

$$(21a) \quad F(R, \alpha) = D(R, \alpha) - S(R, \alpha) = 0$$

$$(22a) \quad \alpha_R = - \frac{F_R}{F_\alpha} = - \frac{[D_R - S_R]}{[D_\alpha - S_\alpha]} \gtrless 0, \quad F_\alpha \neq 0$$

$$(23a) \quad \alpha_R \gtrless 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} S_R \gtrless 0, \text{ oder } |D_R| > |S_R| \text{ falls } S_R < 0 \\ S_R = D_R \\ S_R < D_R \end{array} \right.$$

Aus (21a)-(23a) im Zusammenhang mit (7a), (8a), (18a) und (19a) ist nun unmittelbar ersichtlich, daß das vorliegende Kreditmarktmodell höchstens drei, qualitativ von einander unterschiedliche Gleichgewichtskonfigurationen aufweisen kann. Spuren von den drei typischen Gleichgewichtskurven des Systems (20a) mit den durch Pfeilen symbolisierten Anpassungspfaden sind in den Abbildungen 4, 5 und 6 dargestellt.

16) Eine Teilmenge  $K$  eines topologischen Raumes  $X$  heißt Kurve in  $X$ , wenn es eine stetige Abbildung  $f: I \rightarrow X, I := [a, b]$ , mit  $f(I) = K$  gibt.  $f$  heißt Parameterdarstellung von  $K$ . Allgemein heißt eine stetige Abbildung  $f: I \rightarrow X$  Weg in  $X$ . Die Punktmenge  $\{f(t)/t \in I\}$  wird als Spur von  $f$  bezeichnet. Vgl. dazu z.B. Blatter (5) II S. 65 bzw Jäger (14), S. 102.

Abbildung 4

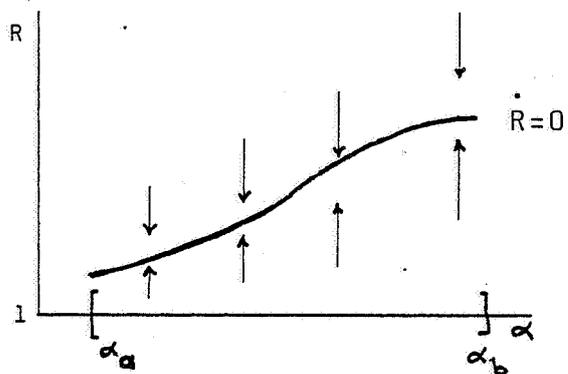


Abbildung 5

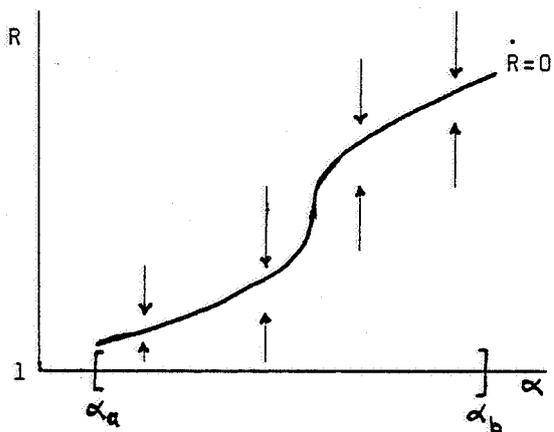
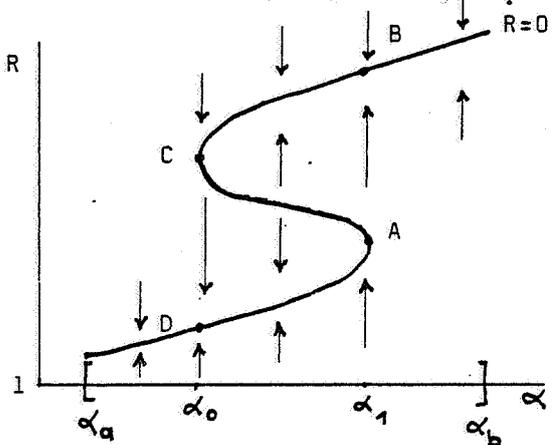


Abbildung 6



Wie aus diesen Abbildungen ebenfalls ersichtlich ist, ist nur jene mögliche Variante einer strukturell stabilen Gleichgewichtskurve des dynamischen Systems (20a), die in Abbildung 7 dargestellt ist, topologisch äquivalent der Gleichgewichtskonfiguration einer Falte, genauer einer Doppelfalte bzw. einem "Schnitt" durch die Gleichgewichtskonfiguration einer Spitzenkatastrophe.

In diesem Kontext gilt über den gesamten Definitionsbereich

$$\alpha_R \gtrless 0 .$$

Wir sehen also, daß auf der Grundlage des vorliegenden Spezifikationsgrades des Kreditmarktmodells es zwar zu einer qualitativen Systemänderung in Gestalt einer Doppelfaltenkatastrophe durch sich verändernde Unsicherheitslagen hinsichtlich bestimmter Parameter kommen kann, jedoch nicht muß. Faltenkatastrophen treten nur dann auf, wenn sich neben lokal dynamisch stabile auch instabile Fixpunkte entlang der differenzierbaren  $R=0$ -Kurve "aufreihen".

Das bedeutet, daß zumindest ein Zinssatzniveau existieren muß, in dessen Umgebung die Bank auf eine marginale Erhöhung (Senkung) des Zinssatzes  $R$  mit einer stärkeren Reduzierung (Erhöhung) des Kreditangebots reagiert als vergleichsweise der Kreditnehmer seine Kreditnachfrage senkt (erhöht). Das heißt, es muß zumindest ein Zinssatzniveau geben, in dessen Umgebung  $-S_R < -D_R$  gilt, damit Faltenkatastrophen auftreten können.

Aus systemtheoretischer, aber auch aus ökonomisch-inhaltlicher Sicht eröffnet im vorliegenden Kontext natürlich nur diese, eine Doppelfalte beschreibende, Gleichgewichtskurve qualitativ neue Einsichten. Diese spezielle Gleichgewichtskonfiguration wollen wir nun genauer diskutieren, insbesondere soll anhand der Gleichgewichtskonfiguration der Doppelfalte in Abbildung 6 anschaulich demonstriert werden, was bei dem vorliegenden Systemzusammenhang mit dem Gleichgewichtszinssatz des Modells bei stetiger marginaler Veränderung des Unsicherheitsparameters  $\alpha$  passiert.

Stetige marginale Veränderungen der langsamen Variablen  $\alpha$ , z.B. eine zunehmende Unsicherheit des zu erwartenden Outputpreises  $p$  bzw. des langfristigen Brutto-Gewinns  $x$  der Firma, führen, beginnend am "unteren Ast" der Gleichgewichtskurve in Abbildung 6 bis zur Parameterkonstellation  $\alpha_1$  zu stetigen marginalen Veränderungen bzw. zu einem kontinuierlichen Anstieg des Gleichgewichtszinssatzes  $R^{**}$ .

Der Gleichgewichtszinssatz  $R^{**}$  steigt jedoch "sprungartig" d.h. diskontinuierlich vom Gleichgewichtspunkt A auf B, wenn der Parameter  $\alpha$  den "kritischen" Punkt, den Katastrophenpunkt  $\alpha_1$  überschreitet, falls man - wie angenommen - unendlich schnelle Anpassung unterstellt.

Geht die Parameterveränderung über  $\alpha_1$  hinaus, so kommt es wiederum zu einem kontinuierlichen Anstieg des Gleichgewichtszinssatzes  $R^{**}$  nunmehr auf dem oberen, reguläre und lokal dynamisch stabile Gleichgewichtszustände abbildenden Ast der Gleichgewichtskurve. Das für Doppelfalten charakteristische Phänomen tritt dann auf, wenn der Unsicherheitsparameter  $\alpha$  sich rückläufig entwickelt, d.h. die Unsicherheit im Sinne des mean-preserving-spread-Kriteriums abnimmt und die korrespondierenden Gleichgewichtszustände auf dem oberen Ast der Gleichgewichtskurve lokalisieren. Die Entwicklung des Gleichgewichtszustandes  $R^{**}$  erfolgt nun kontinuierlich auf dem oberen Ast über den Punkt B hinaus bis zum Gleichgewichtszustand C um dann erst wiederum "sprungartig" auf dem Gleichgewichtszustand D überzugehen, wenn der Parameter marginal den Wert  $\alpha_1$  überschritten hat.

Die mit den Punkten A und C korrespondierenden Parameter  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  beschreiben somit die gesuchte Katastrophenmenge des vorliegenden Doppelfaltenmodells.

Die "ökonomisch" relevanten Implikationen des Modells bei zu(ab)-nehmender Unsicherheit können nun ebenfalls an Hand der Abbildung 6 skizziert werden. Die entgegengesetzten Reaktionen von Kreditanbieter und Kreditnehmer auf z.B. zunehmende Unsicherheit, nämlich Ausweitung der Kreditnachfrage bzw. Restriktion des Kreditangebots jeweils zu gegebenem Zinssatz, können beginnend bei dem Zustand relativ geringster Unsicherheit  $\alpha_a$  vorerst trotz restriktiven

Kreditangebots und steigendem Gleichgewichtszinssatz zu zunehmenden Gleichgewichtskreditmengen und daher zu steigenden Kapitalinputs bei zunehmender Unsicherheit führen. Dieser Prozess hält höchstens an bis zu einem Grad an Unsicherheit, den wir im Modellkontext mit  $\alpha_1$  gekennzeichnet haben. Überschreitet der Parameter diesen "kritischen" Wert, so schlägt dieser Prozess schlagartig um, und zwar der Gestalt, daß es nur zu einem im Verhältnis zu den vorherigen Gleichgewichtszinssätzen sprunghaft gestiegenen Zinssatz zu einem pareto-optimalen Gleichgewicht zwischen Kreditangebot und Kreditnachfrage kommt. Gleichzeitig ist natürlich auch die mit diesem Gleichgewichtszinssatz korrespondierende Gleichgewichtskreditmenge nunmehr im Verhältnis zu den vorhergegangenen Gleichgewichtsmengen ebenfalls sprunghaft auf ein niedrigeres Niveau gesunken und damit auch der optimale Kapitaleinsatz der Firma, obwohl die Firma weiterhin eine tendenziell zunehmende Nachfrageneigung nach Kapital dokumentiert. Salopp formuliert: Die Gleichgewichtskreditmengen werden sicher ab dem Katastrophepunkt  $\alpha_1$  im Gegensatz zu den Unsicherheitszuständen  $\alpha < \alpha_1$  durch ein plötzlich auftretendes, restriktives Angebot der Bank "dominiert", wenn man, wie angenommen, vom "unteren Ast" der Gleichgewichtskonfiguration kommt.<sup>17)</sup>

Neben dem Effekt, daß marginale Veränderungen der Modellstruktur zu dramatischen, plötzlichen bzw. diskreten Änderungen des Systemzustandes führen können, ist gerade dieses Phänomen der Hysterese im vorliegenden Zusammenhang von besonderem Interesse. Die durch bestimmte Unsicherheitslagen bedingte Hysterese, sowohl von Gleichgewichtszinssatz als auch von der Gleichgewichtsmenge im Rahmen des Faltenmodells, kann als eine der möglichen modellendogenen Erklärungen für den empirisch häufig beobachtbaren "ratchet-effect" des Kreditzinssatzes und der Kreditmenge aufgefaßt werden. Darüber hinaus eröffnet der im Rahmen dieses Modells enge Zusammenhang zwischen der Gleichgewichtskreditmenge und dem effektiven Kapitalgütereinsatz der Firma auch eine modellendogene Erklärungsmöglichkeit für das auch empirisch beobachtbare Phänomen, daß die effektive Kapitalgüternachfrage in vielen Fällen sich erst dann in signifikanter und sprunghafter Weise verändert, wenn entscheidungsrelevante Parameter bestimmte "Unsicherheitsschwellen" über- bzw. unterschritten haben.

---

17) Analog nur in umgekehrter Richtung und asymmetrisch verhält es sich im Falle abnehmender Unsicherheit, vom "oberen Ast" kommend.

Literaturhinweise:

Arnol'd, V.I.(1): Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1980

Balasko, Y.(2): Economic Equilibrium and Catastrophe Theory - An Introduction, *Econometrica*, 8, 1978, S. 557-569

Blad, M.C.(3): Exchange of Stability in a Disequilibrium Model, *Journal of Mathematical Economics*, 8, 1981, S. 121-145

Blad, M.C./Zeeman, E.C.(4): Oscillation between Depressed Inflation and Keynesian Equilibria, mimeo, 1981

Blatter, Ch.(5): Analysis I, II, III, Springer 1979, 2. Auflage

Diamond, P.A./Stiglitz, J.E.(6): Increases in Risk and in Risk Aversion, *Journal of Economic Theory*, 8, 1974, S. 337 - 360

Fararo, T.J.(7): An Introduction to Catastrophe Theory, *Behavioral Science*, 23, 1978, S. 291 - 317

Fischer, E.O.(8): Katastrophentheorie und ihre Anwendung in der Wirtschaftswissenschaft, *Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik*, Bd.(Vol.) 200/1, 1985, S. 3 - 26

Freimer, M./Gordon, M.J.(9): Why Bankers Ration Credit, *Quarterly Journal of Economics*, 79, 1965, S. 397-416

George, D.(10): Equilibrium and Catastrophes in Economics, *Scottish Journal of Political Economy*, 28, 1981, S. 43-61

Haken, H.(11): Synergetics - An Introduction, 3rd.ed., Springer Verlag, Heidelberg - New York, 1983

Hartman, R.(12): Factor Demand with Output Price Uncertainty, *American Economic Review*, Sept., 1976, S. 675-681

Hirsch, M.W./Smale, S.(13): Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1974

Jäger, J. (14): Elementare Topologie, UTB Schöningh, 1980

Jaffee, D. (15): Credit Rationing and the Commercial Loan Market, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1971

Jaffee, D./Modigliani, F. (16): A Theory and Test of Credit Rationing, American Economic Review, 59, Dec., 1969, S. 850-872

Markus, L. (17): Catastrophes and Economic Equilibria, in D.L. Russel (Ed.): Calculus of Variations and Control Theory, New York, 1977, S. 73-91; zitiert nach Ursprung (22).

Oi, W. (18): The Desirability of Price Instability under Perfect Competition, Econometrica, Jan., 29, 1961, S. 58-64

Rothschild, M./Stiglitz, J.E. (19): Increasing Risk I: A Definition, Journal of Economic Theory, Sept., 2, 1970, S. 225-243

Smale, S. (20): Catastrophe Theory: Selected Papers, 1972-1977 by E.C. Zeeman, Bulletin of the American Mathematical Society, 84, 1978, S. 1360-1368; zitiert nach Ursprung (22).

Thom, R. (21): Structural Stability and Morphogenesis, New York, Benjamin-Addison-Wesley, 1975

Ursprung, H.W. (22): Die elementare Katastrophentheorie: Eine Darstellung aus der Sicht der Ökonomie, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, 195, Springer, 1982

Varian, H.R. (23): Catastrophe Theory and the Business Cycle, Economic Inquiry, 17, 1979, S. 14-28

Varian, H.R. (24): Dynamical Systems with Applications to Economics, in Arrow, K./Intriligator, M. (Eds.): Handbook of Mathematical Economics, Vol.1, North-Holland Publishing Company, 1982, S.93-110

Zeeman, E.C. (25): Catastrophe Theory: Selected Papers 1972-1977, Reading (Mass.), Addison-Wesley, 1977

Appendix: Symbolzeichen

$\mathbb{R}_+$	Menge der nicht negativen reellen Zahlen
$\mathbb{R}_{++}$	Menge der positiven reellen Zahlen
$\mathbb{R}_-$	Menge der negativen reellen Zahlen
$C^{r \in \mathbb{N}}$	Menge der r-mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}^n$	Menge der geordneten n-Tupel von reellen Zahlen