BEILAGE NR. 6

ZU DEN

MONATSBERICHTEN DES ÖSTERREICHISCHEN INSTITUTES FÜR KONJUNKTURFORSCHUNG

11. JAHRGANG, HEFT 2 26. FEBRUAR 1937

GRUNDSÄTZLICHES ZUR BERECHNUNG DES PRODUKTIONSINDEX

VON

DR. A. WALD, WIEN

WIEN

IM SELBSTVERLAGE DES ÖSTERREICHISCHEN INSTITUTES FÜR KONJUNKTURFORSCHUNG, WIEN, I., STUBENRING 8—10

GRUNDSÄTZLICHES ZUR BERECHNUNG DES PRODUKTIONSINDEX

Von Dr. A. Wald

Zur Beurteilung der Konjunkturlage ist auch die mengenmäßige Entwicklung der Produktion von wesentlicher Bedeutung. Man war daher bemüht, diese mengenmäßige Entwicklung durch eine einzige Maßzahl, den sogenannten Produktionsindex, auszudrücken. Es handelt sich dabei um folgendes Problem: In der Zeitperiode 1 wurden aus den Gütern $G_1, \ldots, G_n$ der Reihe nach die Quantitäten $q'_1, \ldots, q'_n$, und in der Zeitperiode 2 die Quantitäten $q''_1, \ldots, q''_n$ produziert. Es soll nun eine entsprechende Maßzahl gefunden werden, die angibt, um wievielmal die mengenmäßige Produktion in der zweiten Periode größer ist, als die in der ersten Periode; mit anderen Worten, die Aufgabe besteht darin, daß je zwei Güterkombinationen, $A' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ und $A'' = (q''_1, \ldots, q''_n)$, eine Maßzahl, $P\,(A', A'')$, in ökonomisch sinnvoller Weise zugeordnet werden soll, die angibt, um wievielmal die Produktion A'' größer ist als die Produktion A'. Die Maßzahl $P\,(A', A'')$ nennt man dann Produktionsindex. In der Regel wählt man die erste Güterkombination A' als feste Basis; so z. B. die Produktion einer bestimmten Periode oder die durchschnittliche Produktion in einem längeren Zeitraum. Die Produktion in einer anderen Periode wird dann stets auf diese feste Basis bezogen. Hat sich die Produktion in jedem der Güter $G_1, \ldots, G_n$ in demselben Verhältnis geändert, d. h. ist $\frac{q''_1}{q'_1} = \frac{q''_n}{q'_n} = \lambda$, so werden wir sagen, daß die Produktion in der zweiten Periode λ-mal so groß ist wie in der ersten Periode, d. h. $P\,(A', A'') = \lambda$. Sind die Verhältniszahlen $\frac{q''_1}{q'_1}, \ldots, \frac{q''_n}{q'_n}$ nicht alle einander gleich, so ist unsere Fragestellung ohne weitere Präzisierungen darüber, was die Maßzahl $P\,(A', A'')$ eigentlich bedeuten soll, gar nicht zu beantworten.

Könnte man die Annahme machen, daß sich die Produktion in jedem der Güter $G_1, \ldots, G_n$ im selben Verhältnis ändern würde, falls keine zufälligen Störungen einwirken, so könnte man $P\,(A', A'')$ als diese gemeinsame Verhältniszahl definieren und man könnte aus den gegebenen Zahlen $\frac{q''_1}{q'_1}, \ldots, \frac{q''_n}{q'_n}$ auf Grund wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen durch gewisse Mittelwertbildungen den wahrscheinlichsten Wert von $P\,(A', A'')$ berechnen. Nun ist eine solche Annahme sicherlich absurd, denn es gibt stets ökonomische Faktoren, die eine verschiedenartige Entwicklung der Produktion in den einzelnen Gütern $G_1, \ldots, G_n$ bedingen. Man kann daher die Abweichung der Zahlen $\frac{q''_1}{q'_1}, \ldots, \frac{q''_n}{q'_n}$ von einer festen Verhältniszahl nicht als zufällig betrachten.

Irving Fisher*) gibt eine Reihe von formal mathematischen Kriterien an, denen eine gute Indexformel genügen muß, und versucht auf Grund dieser Kriterien eine entsprechende Indexformel herzuleiten. Ich möchte hier auf die Darstellung der Fisherschen Kriterien nicht näher eingehen, da ich diese Fragen in einem in der Zeitschrift für Nationalökonomie in Wien demnächst erscheinenden Aufsatz ausführlich behandeln werde. Hier soll bloß bemerkt werden, daß auch dieser Weg nicht zu einer befriedigenden Lösung des Problems führt, denn einerseits sind nicht alle Fisherschen Kriterien ökonomisch genügend begründet, andererseits gibt es unendlich viele Formeln, die diesen Kriterien genügen und man hat keinen Grund, irgend eine aus diesen auszuzeichnen.

Wir werden hier kurz darlegen, welcher Weg einzuschlagen ist, um zu einer sinnvollen Definition von $P\,(A', A'')$ zu gelangen.

Zuerst soll man auf Grund rein ökonomischer Erwägungen für je zwei Güterkombinationen A' und A'' festlegen, ob diese gleichwertig sind, d. h. ob $P\,(A', A'') =$ oder $\neq 1$ zu setzen ist. Wir werden die Gleichwertigkeit, bzw. die Nichtgleichwertigkeit von zwei Güterkombinationen A' und A'' durch das Symbol $A' \sim A''$, bzw. $A' \nsim A''$ darstellen.

*) Irving Fisher: The Making of Index Numbers, Boston 1923.

Es ist klar, daß jede sinnvolle Definition der Relation $A' \sim A''$ folgende Eigenschaften haben muß:

1. Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ zwei identische Güterkombinationen, d. h. es ist $q_1' = q_1'', \ldots, q_n' = q_n''$, so gilt $A' \sim A''$.

2. Ist $A' \sim A''$, so auch $A'' \sim A'$.

3. Aus $A' \sim A''$ und $A'' \sim A'''$, folgt $A' \sim A'''$.

4. Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ zwei Güterkombinationen, wobei $q_i' \leqq q_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $q_1' + \ldots + q_n' < q_1'' + \ldots + q_n''$ gilt, so ist $A' \not\sim A''$.

5. Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$, $B' = (r_1', \ldots, r_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ drei Güterkombinationen, so daß $q_i' \leqq q_i''$ und $r_i' \geqq q_i''$ $(i = i, 2, \ldots, n)$ gilt, so wird bei jedem stetigen Übergang von A' zu B' eine Güterkombination C' passiert, für welche $C' \sim A''$ gilt.

Eine sinnvolle Definition der Indexformel $P(A', A'')$ wird wohl den folgenden Bedingungen genügen müssen:

I. Es gilt $P(A', A'') = 1$ dann und nur dann, falls $A' \sim A''$ ist.

II. Ist $B'' \sim A''$, so gilt $P(A', A'') = P(A', B'')$.

III. Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ zwei Güterkombinationen und gilt $\lambda q_1' = q_1'', \ldots, \lambda q_n' = q_n''$, so ist $P(A', A'') = \lambda$.

Es gilt nun der folgende *Satz:*

Ist für die Paare der Güterkombinationen eine Relation $\sim$ gemäß den Bedingungen 1 bis 5 erklärt, so gibt es genau eine Funktion $P(A', A'')$, die den Bedingungen I bis III genügt.

Beweis: Es gibt sicherlich zwei positive Zahlen λ_1 und λ_2, so daß

$\lambda_1 q_i' \leqq q_i''$ und $\lambda_2 q_i' \geqq q_i''$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ gilt.[1]

Wegen Bedingung 5 und 4 gibt es genau eine positive Zahl λ zwischen λ_1 und λ_2, so daß für die Güterkombination $B'' = (\lambda q_1', \ldots, \lambda q_n')$ die Beziehung gilt:

$$B'' \sim A''.$$

Aus II folgt dann, daß $P(A', B'') = P(A', A'')$ gilt. Wegen (III) ist $P(A', B'') = \lambda$ und mithin ist auch $P(A', A'') = \lambda$. Die so berechnete Formel $P(A', A'')$ genügt tatsächlich, wie man leicht zeigen kann, den Bedingungen I bis III, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir sehen also, daß, wenn man die Relation $\sim$ bereits erklärt hat, so ist $P(A', A'')$ schon eindeutig bestimmt.

[1]) Vorausgesetzt, daß q_i' und $q_i'' \neq 0$ ist für jedes i. Wir wollen uns auf solche Güterkombinationen beschränken.

Für welche Paare A', A'' die Beziehung $A' \sim A''$ gelten soll und für welche nicht, kann man bloß auf Grund ökonomischer Erwägungen und nach dem Zweck des Produktionsindex entscheiden.

Die gemäß I bis III definierte Indexzahl $P(A', A'')$ besagt nichts anderes, als dies: Die Güterkombination A'' ist dem $P(A', A'')$-fachen der Güterkombination A' gleichwertig; dabei verstehen wir unter dem λ-fachen einer Güterkombination $(q_1, \ldots, q_n)$ die Güterkombination $(\lambda q_1, \ldots, \lambda q_n)$.

Wir wollen noch eine wichtige Bemerkung machen. Ist $A' \sim B'$, so muß nicht notwendigerweise auch

$$(II') \quad P(A', A'') = P(B', A'')$$

gelten. Diese Beziehung müßte nur dann stets gelten, falls die Relation $\sim$ auch der folgenden Bedingung genügt:

(*) *Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $B' = (r_1', \ldots, r_n')$ zwei gleichwertige Güterkombinationen, ferner λ eine beliebige positive Zahl, so sind auch die Güterkombinationen $C' = (\lambda q_1', \ldots, \lambda q_n')$ und $D' = (\lambda r_1', \ldots, \lambda r_n')$ gleichwertig.*

Es liegt jedoch kein Grund vor eine solche Bedingung zu postulieren. Genügt aber die Relation $\sim$ auch der Bedingung (*), so läßt sich zeigen, daß nicht nur II', sondern auch die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$(II^*) \quad \text{Aus } A' \sim B' \text{ und } A'' \sim B'' \text{ folgt}$$
$$P(A', A'') = P(B', B'').$$

Einige Definitionen der Relation $\sim$. Die obigen Ausführungen haben gezeigt, daß auf Grund der Relation $\sim$ die Indexformel $P(A', A'')$ schon eindeutig berechnet werden kann. Um zu einer entsprechenden Indexformel $P(A', A'')$ zu gelangen, genügt es daher für je zwei Güterkombinationen A und B festzulegen, ob $A \sim B$ gilt oder nicht. Diese Aufgabe ist jedoch eine rein ökonomische und kann mit formal mathematischen Überlegungen nicht gelöst werden.

Wir wollen hier einige Beispiele für die Relation $\sim$ angeben. Um zu veranschaulichen, wie die Indexformel $P(A', A'')$ auf Grund der Relation $\sim$ berechnet werden kann, betrachten wir zunächst die folgende rein mathematische (ökonomisch nicht begründete) Definition der Relation $\sim$: für zwei Güterkombinationen $A = (q_1, \ldots, q_n)$ und $B = (r_1, \ldots, r_n)$ gelte $A \sim B$ dann und nur dann, falls

$$\sum_{i=1}^{n} a_i q_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i r_i^2$$

ist, wobei die Zahlen a_i $(i = 1, \ldots, n)$ positiv sind. Man bestätigt leicht, daß die so definierte Relation den Bedingungen 1 bis 5 genügt. Sind $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ zwei Güterkombinationen, so folgt leicht aus den Eigenschaften 1 bis 5 der Relation $\sim$, daß es genau eine positive Zahl λ gibt, für welche das λ-fache der Güterkombination A' mit der Güterkombination A'' gleichwertig ist. Der Wert von λ ergibt sich aus der folgenden Gleichung:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (\lambda q'_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i (q''_i)^2,$$

also

$$\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i (q''_i)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i (q'_i)^2}}$$

Auf Grund der Bedingungen I bis III ergibt sich unmittelbar, daß

$$P(A', A'') = \lambda$$

gilt.

Wir wollen nun kurz einige Definitionen der Relation $\sim$ besprechen, die eine gewisse ökonomische Bedeutung haben.

a) Es sei T ein entsprechend gewählter Zeitraum von etwa k Zeiteinheiten. Die in der ersten Zeiteinheit von T produzierte Menge aus dem Gute G_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sei q_i^1, die in der zweiten Zeiteinheit $q_i^2, \ldots,$ und die in der $k$ten Zeiteinheit q_i^k. Den Produktionswert von q_i^1 bezeichnen wir mit w_i^1, den von q_i^2 mit $w_i^2, \ldots,$ und den von q_i^k mit w_i^k. Die Gesamtproduktion Q_i aus G_i während der Zeitdauer T und ihr Gesamtproduktionswert W_i sind dann durch die folgenden Formeln gegeben:

$$Q_i = q_i^1 + q_i^2 + \ldots + q_i^k$$
$$W_i = w_i^1 + w_i^2 + \ldots + w_i^k$$

Die auf die Zeiteinheit entfallende durchschnittliche Produktion aus G_i ist dann gleich

$$q_i = \frac{q_i^1 + \ldots + q_i^k}{k} = \frac{Q_i}{k}$$

und der durchschnittliche Produktionswert p_i einer Einheit aus G_i ist dann offenbar durch die Formel gegeben:

$$p_i = \frac{W_i}{Q_i}.$$

Wir definieren nun:

α) Für zwei Güterkombinationen $A' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ und $(A'' = q''_1, \ldots, q''_n)$ gelte dann und nur dann die Relation $A' \sim A''$, falls $q'_1 p_1 + \ldots + q'_n p_n = q''_1 p_1 + \ldots q''_n p_n$ gilt.

Man bestätigt mühelos, daß die so definierte Relation nicht nur den Bedingungen 1) bis 5), sondern auch der Bedingung (*) genügt und mithin dann für den Produktionsindex auch die Bedingung II* erfüllt ist.

Sind $A' = (q'_1, \ldots, q'_n)$ und $A'' = (q''_1, \ldots q''_n)$ zwei Güterkombinationen, so ergibt sich auf Grund der Bedingungen I—III die Indexformel:

$$P(A', A'') = \frac{q''_1 p_1 + \ldots + q''_n p_n}{q'_1 p_1 + \ldots + q'_n p_n}.$$

Setzt man $A' = A = (q_1, \ldots, q_n)$ d. i. die durchschnittliche Produktion im Zeitraum T, so erhält man

$$P(A, A'') = \frac{q''_1 p_1 + \ldots + q''_n p_n}{q_1 p_1 + \ldots + q_n p_n} =$$

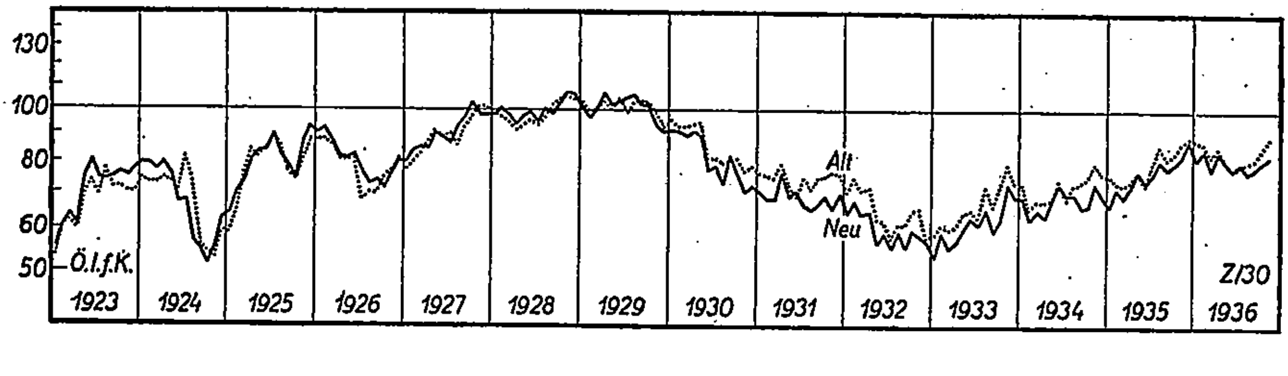
$$= \frac{q''_1 \frac{W_1}{Q_1} + \ldots + q''_n \frac{W_n}{Q_n}}{\frac{W_1}{k} + \ldots + \frac{W_n}{k}} = \frac{\frac{q''_1}{q_1} W_1 + \ldots + \frac{q''_n}{q_n} W_n}{W_1 + \ldots + W_n}.$$

Es gilt also: *wählt man als Basis die durchschnittliche Produktion $A = (q_1, \ldots, q_n)$ im Zeitraum T, so ist der Produktionsindex P (A, A'') nichts anderes als ein gewogenes arithmetisches Mittel der einzelnen Quantitätsindices $\frac{q''_1}{q_1}, \ldots, \frac{q''_n}{q_n}$, wobei das Gewicht der Indexziffer $\frac{q''_i}{q_i}$ gleich ist dem Produktionswert W_i der während T aus G_i produzierten Menge.*

Der so erhaltene Produktionsindex hat einen guten ökonomischen Sinn und dürfte für die Beurteilung der Konjunkturlage von Bedeutung sein. Es sei noch bemerkt, daß *der Wert des Produktionsindex $P(A', A'')$ von der Wahl des zugrunde gelegten*

Der Produktionsindex

(Logarithmischer Maßstab, Ø 1929 = 100)



Zeitraumes T abhängig ist. Der Zeitraum T muß daher nach ökonomischen Gesichtspunkten sorgfältig ausgewählt werden.

b) Es bezeichne T wiederum einen entsprechend ausgewählten Zeitraum von etwa k Zeiteinheiten, ferner bezeichne q_i^j ($i = 1, \ldots, n$; $j = 1, \ldots, k$) die in der j-ten Zeiteinheit aus dem Gute G_i produzierte Menge, V_i^j die Anzahl der für die Herstellung von q_i^j beschäftigten Arbeiter. Die Gesamtproduktion Q_i aus G_i während der Zeitdauer T und die für die Herstellung von Q_i insgesamt verwendete Arbeitsmenge V_i sind dann durch die folgenden Formeln gegeben:

$$Q_i = q_i^1 + \ldots + q_i^k$$
$$V_i = V_i^1 + \ldots + V_i^k.$$

Die auf die Zeiteinheit entfallende durchschnittliche Produktion ist dann gleich

$$q_i = \frac{Q_i}{k}$$

und die für die Herstellung einer Einheit von G_i notwendige durchschnittliche Arbeitsmenge d_i ist durch die Formel gegeben:

$$d_i = \frac{V_i}{Q_i}.$$

Wir definieren nun:

β) für zwei Güterkombinationen $A' = (q_1', \ldots, q_n')$ und $A'' = (q_1'', \ldots, q_n'')$ gelte dann und nur dann die Relation $A' \sim A''$, falls $q_1' d_1 + \ldots + q_n' d_n = q_1'' d_1 + \ldots + q_n'' d_n$ gilt.

Diese Definition der Relation $\sim$ unterscheidet sich von der Definition α) lediglich darin, daß der durchschnittliche Produktionswert p_i durch die durchschnittliche Arbeitsmenge d_i ersetzt wird. Man erhält daher analog das Resultat: *wählt man als Basis die durchschnittliche Produktion $A = (q_1, \ldots, q_n)$ im Zeitraum T, so ist der Produktionsindex $P(A, A'')$ nichts anderes als ein gewogenes arithmetisches Mittel der einzelnen Quantitätsindices $\frac{q_1''}{q_1}, \ldots, \frac{q_n''}{q_n}$, wobei das Gewicht der Indexziffer $\frac{q_i''}{q_i}$ gleich ist der Arbeitsmenge V_i, die für die Herstellung von G_i während der Zeitdauer T verwendet wurde.*

Es ist klar, daß für die Beurteilung der Konjunkturlage der auf Grund der Definition β) berechnete Produktionsindex weniger geeignet ist, als der auf Grund der Definition α) berechnete Index. In der Praxis kann es jedoch vorkommen, daß die Produktionswerte nicht ermittelt werden können und bloß Daten über die verwendeten Arbeitsmengen zur Verfügung stehen. In diesem Falle wird man sich mit dem auf Grund der Definition β) berechneten Produktionsindex begnügen müssen. Der so gewonnene Produktionsindex ist noch immer unvergleichlich besser, als wenn man ihn etwa dem ungewogenen arithmetischen Mittel der einzelnen Quantitätsindices $\frac{q_1''}{q_1}, \ldots, \frac{q_n''}{q_n}$ gleichsetzen würde.

Für gewisse besondere Zwecke erscheint sogar der auf Grund der Definition β) berechnete Produktionsindex vorteilhafter, als der auf Grund der Definition α) berechnete Index; z. B. bei Untersuchungen über die fortschreitende Kapitalausstattung und über den Grad der Ausnützung der Kapazität in den verschiedenen Industrien. Im allgemeinen wird bei allen Untersuchungen, wo es sich um die Beziehungen zwischen Arbeitsmengen und produzierten Gütermengen handelt, der auf Grund der Definition β) berechnete Produktionsindex gute Dienste leisten.

c) Es sei noch kurz eine dritte Möglichkeit der Definition von $\sim$ erwähnt. Beschränkt man sich bloß auf Konsumgüter und betrachtet man eine Gruppe von Personen mit gleichartigen Bedürfnissen (d. h. daß für jede Person der betrachteten Gruppe das System der Indifferenzlinien dasselbe ist), so kann man die Relation $\sim$ folgendermaßen definieren: Sind A und B zwei Güterkombinationen, so gelte die Beziehung $A \sim B$ dann und nur dann falls A und B auf einer Indifferenzlinie liegen. Der auf Grund dieser Gleichwertigkeitsdefinition berechnete Produktionsindex wäre auch für gewisse Untersuchungen von Interesse.

Es sei zum Schlusse noch bemerkt, daß je nach dem Zweck und der Verwendung des Produktionsindex auch weitere Möglichkeiten für die Definition der Gleichwertigkeitsrelation und mithin des Produktionsindex bestehen. Ich möchte darauf nicht näher eingehen, da ich in den obigen Ausführungen bloß auf die Zusammenhänge zwischen der Gleichwertigkeitsrelation und dem Produktionsindex und auf ihre formalen Eigenschaften hinzuweisen bezweckt habe. Es sei bloß erwähnt, daß für die Zwecke, zu welchen der Produktionsindex üblicherweise in der Konjunkturforschung verwendet wird, die Gleichwertigkeitsdefinition α) am besten geeignet zu sein scheint.

Neuberechnung des österreichischen Produktionsindex

Der vom Institut erstellte Index der industriellen Produktion ist einer Neuberechnung unterzogen worden. Während der bis Jänner dieses Jahres veröffentlichte Produktionsindex einen einfachen arithmetischen Durchschnitt aus einer Reihe wichtiger Produktionsreihen darstellte, ist der neue

Index nach dem Arbeiterstand gewichtet, um die verhältnismäßige Bedeutung der einzelnen Produktionsreihen in höherem Maße zu berücksichtigen. Die Gewichtung erfolgte entsprechend der unter Punkt b (Seite VI) vorstehend gegebenen Definition der Gleichwertigkeit. Als der für die Gewichtung maßgebende Arbeiterstand diente der Arbeiterstand der entsprechenden Industrien jeweils am Ende des Jahres im Durchschnitt der Jahre 1925—1936. Die in dem Index enthaltenen Reihen sind Steinkohle, Braunkohle, Eisenerz, Roheisen, Rohstahl, Walzware plus Absatz von Halbzeug, Baumwollgarn, Papier, Zellulose, Holzschliff und Pappe. Der Index, der nach Persons saisonbereinigt wurde, ist auf der Basis 1929 = 100 berechnet worden.

Wie aus Abbildung Z/30, Seite V ersichtlich ist, sind die Abweichungen des neuen Index gegenüber dem früher berechneten ungewichteten Index nicht sehr bedeutend. Es zeigt sich nur, daß der neue Index in den Krisenjahren 1930—1933 unter dem alten Index liegt, was darauf zurückgeht, daß infolge der Gewichtung die Produktionsverminderung in der Eisen- und Textilindustrie stärker zum Ausdruck kommt als im alten Index.

Der neue Produktionsindex ist bis zum Jahre 1923 zurückgerechnet worden und daher auch mit den früheren Jahren vergleichbar. Zwischen dem bis Jänner 1937 veröffentlichten ungewichteten Produktionsindex und dem neuen Produktionsindex ist jedoch eine Vergleichbarkeit nicht gegeben.